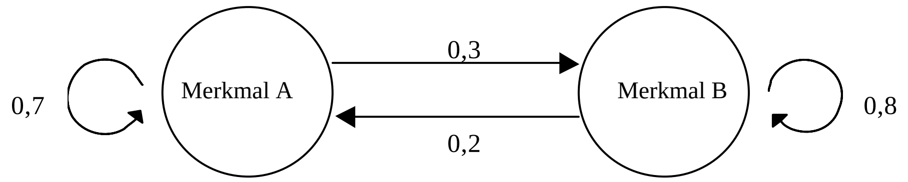
Name: **Datum:**

Übergangsprozesse - Insektenmerkmale - Aufgabe mit Lösung

Eine Population von Insekten enthält Tiere mit zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z.B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, dass Insekten mit Merkmal A zu 70% Nachkommen mit Merkmal A und zu 30% solche mit Merkmal B haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 80% wieder Nachkommen mit diesem Merkmal, zu 20% solche mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.

Übergangsgraph:



☞ **Arbeitsaufträge:**

Untersuchen Sie die langfristige Verteilung der beiden Merkmale.

Lösung 1:

$x_A(0)$ sei der Anteil der Insekten mit Merkmal A zu Beobachtungsbeginn, $x_B(0)$ entsprechend derjenige mit Merkmal B.

Für die Verteilung der Merkmale in der nächsten Generation gilt dann:

$$x_A(1) = 0{,}7\ x_A(0) + 0{,}2\ x_B(0)$$
$$x_B(1) = 0{,}3\ x_A(0) + 0{,}8\ x_B(0)$$

Die Übergangsmatrix lautet also: $U = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Mit Hilfe des Startvektors $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_A(0) \\ x_B(0) \end{pmatrix}$ und der Übergangsmatrix U lässt sich die Verteilung in der n-ten Generation angegeben: (vgl. Beispiel 2):

$$\overrightarrow{x_n} = U^n \cdot \overrightarrow{x_0}$$

Durch die Berechnung der folgenden Matrizenpotenzen können wir uns einen Überblick über die Entwicklung in der Verteilung der Merkmale verschaffen:

$U^2 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}30 \\ 0{,}45 & 0{,}70 \end{pmatrix}$ $U^3 = \begin{pmatrix} 0{,}475 & 0{,}350 \\ 0{,}525 & 0{,}650 \end{pmatrix}$ $U^4 = \begin{pmatrix} 0{,}438 & 0{,}375 \\ 0{,}563 & 0{,}625 \end{pmatrix}$

$U^5 = \begin{pmatrix} 0{,}420 & 0{,}388 \\ 0{,}582 & 0{,}613 \end{pmatrix}$ $U^6 = \begin{pmatrix} 0{,}410 & 0{,}394 \\ 0{,}591 & 0{,}607 \end{pmatrix}$ $U^{12} = (U^6)^2 = \begin{pmatrix} 0{,}401 & 0{,}400 \\ 0{,}601 & 0{,}601 \end{pmatrix}$

<u>Bemerkungen:</u>

- Dass die Spaltensummen nicht genau 1 ergeben, liegt an Rundungsfehlern.
- Will man rasch zu hohen Matrizenpotenzen gelangen, so empfiehlt sich folgende Vorgehensweise:
  $A^2 = A \cdot A$; $A^4 = A^2 \cdot A^2$; $A^8 = A^4 \cdot A^4$; $A^{16} = A^8 \cdot A^8$; usw.

Vermutung: Die Matrizenfolge (U^n) nähert sich einer Grenzmatrix G mit:

$$G = \lim_{n\to\infty} U^n = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Ist dies der Fall, so wird sich auch die Verteilung auf einen Grenzvektor $\vec{x}$ hin stabilisieren. Bei einer Gleichverteilung der Merkmale in der Startpopulation ($x_A(0) = 0{,}5$ und $x_B(0) = 0{,}5$) ergibt sich:

$$\vec{x} = G \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Auf lange Sicht wird sich also eine stabile Verteilung der Merkmale derart einstellen, dass das Merkmal A bei 40% und das Merkmal B bei 60% der Insekten vorkommt.

Die sich langfristig einstellende stabile Grenzverteilung (=stationäre Verteilung) hängt nicht von der Anfangsverteilung der Merkmale ab:

Sei $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}$ mit $a \in [0,1]$ eine beliebige Anfangsverteilung, so ergibt sich als stabile Grenzverteilung:

$$\vec{x} = G \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0,4a + 0,4(1-a) \\ 0,6a + 0,6(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

Lösung 2:

Unter der Annahme der Konvergenz der Verteilungen $\overrightarrow{x_n}$ auf eine Grenzverteilung $\vec{x}$ hin, lässt sich die Grenzverteilung auch ohne Kenntnis der Grenzmatrix berechnen.

Der Grenzvektor $\vec{x}$ ist dadurch gekennzeichnet, dass er sich unter der Wirkung der Übergangsmatrix nicht mehr verändert. Es gilt also: $U \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Auf unser Beispiel angewendet:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung von x_A und x_B muss also ein homogenes LGS gelöst werden:

$$\begin{array}{ll} 0,7\, x_A + 0,2\, x_B = x_A & (1) \\ 0,3\, x_A + 0,8\, x_B = x_B & (2) \\ \hline -0,3x_A + 0,2x_B = 0 & (1') \\ \;\;0,3x_A - 0,2x_B = 0 & (2') \end{array}$$

Eine Gleichung erweist sich als überflüssig . Wir wählen $x_A = t$ und erhalten dann $x_B = 1,5t$. Der gesuchte Grenzvektor ergibt sich als spezielle Lösung des homogenen LGS unter der Nebenbedingung: $x_A + x_B = 1$ (x_A und x_B geben die Anteile an, mit denen die Merkmale in der Population vorkommen; ihre Summe muss daher gleich 1 sein).

$$t + 1,5\, t = 1 \;\Rightarrow\; t = 0,4 \qquad \text{Grenzvektor: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$