LA/AG 2

II.2 Insektenpopulation

In den Tropen legen die Weibchen einer in Deutschland unbekannten Insektenpopulation jedes Jahr kurz vor Beginn der Regenzeit jeweils 90 Eier und sterben bald darauf. Aus den Eiern schlüpfen wenig später Larven. Der Larvenbestand nimmt von Jahr zu Jahr durch Witterungseinflüsse, aber auch durch den Verzehr durch andere Tiere, ab. Im dritten Jahr verpuppen sich die Larven, und aus einem Teil der Puppen entwickeln sich im darauf folgenden Jahr Weibchen, die wieder 90 Eier legen. Die jährliche Entwicklung dieser Insektenpopulation wird durch die nachstehende Populationsmatrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Übergangsgraphen dar und beschreiben Sie die biologischen Bedeutungen der von Null abweichenden Koeffizienten der Matrix A. **15 P**

b) In der folgenden Tabelle ist eine Anfangspopulation $\vec{p}_0$ der oben genannten Insekten gegeben, die jeweils ihrem Alter entsprechend gegliedert sind:

Alter	Name	Anzahl
1 Jahr	Larven 1	9000
2 Jahre	Larven 2	3000
3 Jahre	Puppen	900
4 Jahre	Weibchen	700

- Bestimmen Sie den Populationsvektor nach einem Jahr ($\vec{p}_1$).
- Geben Sie an, wie Sie die Population nach 4 Jahren unter ausschließlicher Verwendung des Anfangspopulationsvektors $\vec{p}_0$ und der Matrix A berechnen könnten. **10 P**

Betrachten Sie folgende Übersicht. Dabei ist die Zeit in Jahren angegeben, der Populationsvektor besteht aus den Individuen der in b) genannten Teilgruppen, und die Gesamtpopulation ist die Summe der Individuen in den Teilgruppen, also <u>ohne die männlichen Insekten</u>.

Zeit	Populationsvektor	**Gesamtpopulation** (Summe)
0	$\vec{p}_0$ = (9000 | 3000 | 900 | 700)	13 600
1	$\vec{p}_1$ = (63000 | 3000 | 1000 | 90)	67 090
2	$\vec{p}_2$ = (8100 | 21000 | 1000 | 100)	30 200
3	$\vec{p}_3$ = (9000 | 2700 | 7000 | 100)	18 800
4	$\vec{p}_4$ = $\vec{p}_0$ = (9000 | 3000 | 900 | 700)	13 600

c) • Skizzieren Sie die jeweiligen Werte der Gesamtpopulation in anliegendes Koordinatensystem.

- Beschreiben Sie, wie sich die Populationsvektoren und damit die Gesamtpopulation in den kommenden Jahren nach dem Modell entwickeln werden, und skizzieren Sie entsprechend den weiteren Verlauf der Gesamtpopulation bis zum Jahr 10.
- Bestimmen Sie den Populationsvektor nach 25 Jahren ($\vec{p}_{25}$) und den Populationsvektor im Jahr vor Beginn der Beobachtung ($\vec{p}_{-1}$) (bei Verwendung des bisherigen Modells). **20 P**

d) Die in c) betrachtete Eigenart des verwendeten Modells kann von der Matrix abhängen, aber auch von der Startpopulation.

- Geben Sie begründet die Eigenschaft der Matrix *A* an, die unabhängig von der Startpopulation zu Ergebnissen wie in c) beschrieben führt.
- Untersuchen Sie, ob es Populationsvektoren ($\vec{p}_x$) gibt, die sich jährlich wiederholen, und bestimmen Sie gegebenenfalls einen dieser Populationsvektoren. **15 P**

Zu den eben angesprochenen Ursachen für bestimmte Eigenschaften der Population folgt jetzt ein rein mathematisches Beispiel:

Gegeben ist eine allgemeine Populationsmatrix *P*: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{N}^*$ und $0 < b,c,d < 1$.

e) Eine quadratische Matrix *M* heißt zyklische Matrix, wenn es eine natürliche Zahl *n* gibt, so dass gilt: $M^n = E$.

- Zeigen Sie, dass die obige Populationsmatrix *P* für $n = 2$ und für $n = 3$ nicht zyklisch sein kann.
- Ermitteln Sie die Bedingungen für *a*, *b*, *c* und *d*, damit gilt: $P^4 = E$. **15 P**

Die folgenden beiden Aufgaben beziehen sich wieder auf das durch die Matrix A beschriebene Modell, das jetzt neuen Situationen angepasst werden soll:

f) Durch eine spürbare Veränderung der Trocken- und Regenzeiten, die von Wissenschaftlern auf den allseits diskutierten Klimawandel zurück geführt wird, halbiert sich seit einigen Jahren bei sonst gleich bleibenden Überlebensraten die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier.

- Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix A_{neu} .
- Es gilt: $A_{neu}^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

  Interpretieren Sie, wie sich diese Veränderung auf die langfristige Entwicklung der Insektenpopulation auswirkt. **10 P**

g) Inzwischen lässt sich sogar feststellen, dass die schon erwähnten Veränderungen der Trocken- und Regenzeiten nicht nur die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier halbiert hat, sondern auch dazu geführt hat, dass ein Zwölftel der Larven 1 sich bereits verpuppt, also eine Generation überspringt. Damit entwickelt sich nur noch ein Viertel der Larven 1 zu Larven 2, also wie bisher.

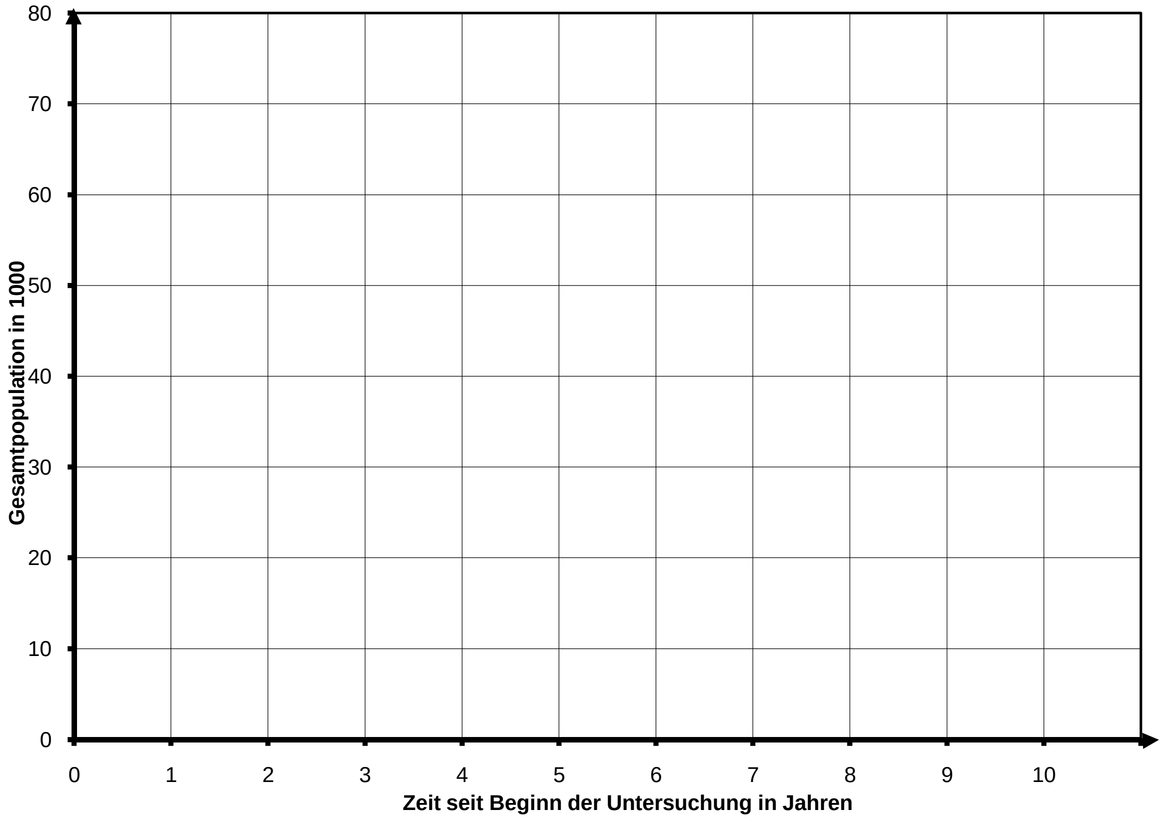
- Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix A_{neu2} .
- Begründen Sie, warum bei dieser Populationsentwicklung die Bestimmung von Vorjahresbeständen nicht zu jedem beliebigen Populationsvektor möglich ist, und interpretieren Sie diese Fälle im Sachkontext der Aufgabe. **15 P**

Anlage zur Aufgabe „Insektenpopulation“

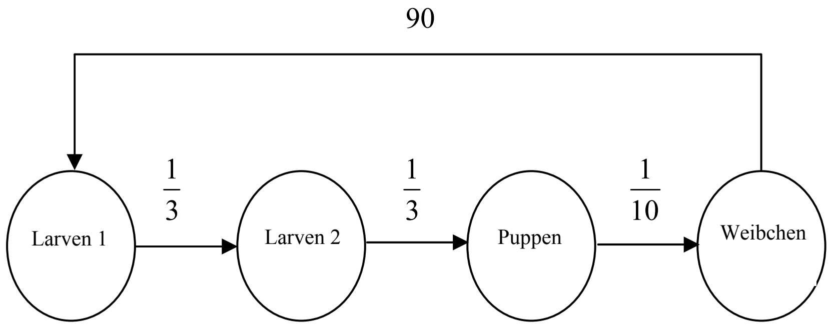
Bitte beachten Sie:

In x-Richtung wird die Zeit der Beobachtung in Jahren aufgetragen, „0“ steht für den Beginn der Beobachtung der Insektenpopulation.

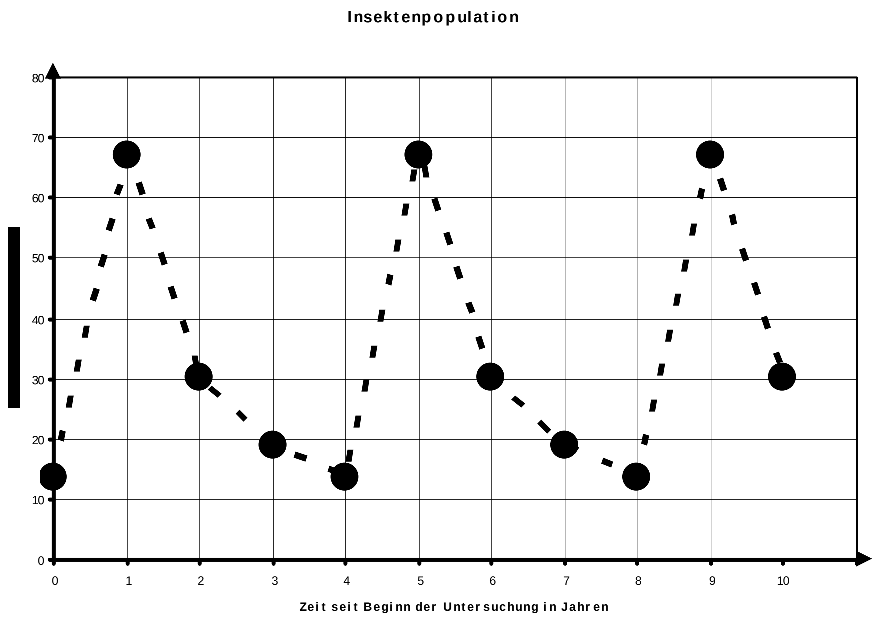
In y-Richtung wird jeweils die Anzahl der Gesamtpopulation (als Summe der Teilgruppen) in 1000 aufgetragen.



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Biologische Bedeutung der Koeffizienten: $a_{14} = 90$ ist die Vermehrungsrate $a_{21} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 1. Jahr (Larven 1) $a_{32} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 2. Jahr (Larven 2) $a_{43} = \frac{1}{10}$ ist die Überlebensrate der verpuppten Larven im 3. Jahr (Puppen)	10	5	
b)	Bestimmung von $\vec{p}_1$: $\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}.$ Darstellung des Populationsvektors $\vec{p}_4$ (Population nach 4 Jahren): $\vec{p}_4 = A^4 \cdot \vec{p}_0$.	5	5	
c)	Skizze zur Gesamtpopulation *(Verbindung der Punkte nicht notwendig, sie erhöht aber den optischen Eindruck.)* Nach vier Jahren ist der Populationsvektor identisch mit jenem zu Beginn der Untersuchung und ebenso die Gesamtpopulation. Da die Berechnung der Populationsvektoren nach dem Schema $\vec{p}_{n+1} = A \cdot \vec{p}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ abläuft, wiederholt sich alle 4 Jahre der Populationsverlauf. Die Gesamtpopulation P_{10} nach 10 Jahren ist also gleich der Gesamtpopulation nach 2 Jahren P_2.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III



Folgerung für $\vec{p}_{25}$:

$\vec{p}_{24} = \vec{p}_0$, da 4 ein Teiler von 24 ist. $\Rightarrow$ $\vec{p}_{25} = \vec{p}_1$.

Bestimmen von $\vec{p}_{-1}$:

Nimmt man an, dass das verwendete Populationsmodell schon vor dem Untersuchungsbeginn gültig war, kann von dem zyklischen Vorgang auch in der Vergangenheit (ausgedrückt durch negative Indizes) ausgegangen werden. Damit ist $\vec{p}_{-1}$ der Populationsvektor vor $\vec{p}_0 = \vec{p}_4$, d. h. $\vec{p}_{-1} = \vec{p}_3$.

Natürlich kann $\vec{p}_{-1}$ auch durch Lösung eines LGS bestimmt werden.

I	II	III
5	15	

d) Eigenschaft der Matrix A:

Die Matrix A^4 ist identisch mit der Einheitsmatrix E, denn es muss gelten $A^4 \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_4 = \vec{p}_0 (= E \cdot \vec{p}_0)$.

Eigenschaft der Startpopulation:

Die Aufgabenstellung führt zum folgenden LGS: $A \cdot \vec{p}_x = \vec{p}_x$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 90x_4 \\ \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Hieraus ergibt sich die mehrdeutige Lösung: $x_1 = 90x_4,\ x_2 = 30x_4,\ x_3 = 10x_4,\ x_4 \in \mathbb{N}^*$. Die Bedingung ist immer dann erfüllt, wenn die Komponenten des Populationsvektors im Verhältnis 90:30:10:1 stehen. Also lautet eine mögliche Lösung: $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.		10	5
e)	Berechnung von P^2, P^3 und P^4: $P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 & a \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \\ b \cdot c \cdot d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Da die Diagonalelemente sowohl bei P^2 als bei P^3 jeweils Null sind, ist eine Einheitsmatrix in beiden Fällen nicht erreichbar. $P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P^4 = \begin{pmatrix} a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$ Also: $P^4 = E$, wenn gilt: $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Neue Populationsmatrix:

$$A_{Neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation:
Die Veränderung der Trocken- und Regenzeiten führt dazu, dass sich die Insektenpopulation in einem Zyklus von jeweils vier Jahren halbieren wird. Bleibt das Modell gültig, wird die Population langfristig aussterben.</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>

$$A_{Neu2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix},$$

denn $\frac{1}{12}$ der Larven 1 geht in die Gruppe „Puppen“ über, $\frac{1}{4}$ der Larven 1 wie bisher in die Gruppe Larven 2.
Ermittlung von $\vec{p}_{(a_0)-1}$ aus einer beliebigen Anfangspopulation $\vec{p}_{a_0}$ führt zu dem Ansatz $\vec{p}_{a_0} = A_{Neu2} \cdot \vec{p}_{(a_0)-1}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45x_4 \\ \frac{1}{4}x_1 \\ \frac{1}{12}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix}.$$

Als Lösung ergibt sich: $x_1 = 4a_2,\ x_2 = 3a_3 - a_2,\ x_3 = 10a_4,\ x_4 = \frac{1}{45}a_1$
mit $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0 \wedge x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Aus $x_2 = 3a_3 - a_2$ ist unmittelbar zu erkennen, dass für die Fälle $a_2 > 3a_3$ die Nichtnegativitätsbedingung für die Anzahl der zweijährigen Larven nicht mehr gegeben ist. Also lässt sich für alle Populationsvektoren, in denen die Anzahl der zweijährigen Larven mehr als dreimal so hoch ist wie die der Puppen, keine Vorjahrespopulation ermitteln. Außerdem muss x_4 ganzzahlig, a_1 (die Anzahl der Larven 1 des Populationsvektors) also ein Vielfaches von 45 sein. Die hier vorliegende Frage der Lösbarkeit des zugehörigen Gleichungssystems kann auch mit anderen Verfahren geklärt werden.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20