LA/AG 2

II.2 Geckos

Geckos gehören zur Familie der Schuppenkriechtiere. Sie bevölkern seit etwa 50 Millionen Jahren die Erde und haben sich im Laufe ihrer Entwicklung weltweit ausgebreitet. Aufgrund ihrer hervorragenden Anpassungsfähigkeit haben Geckos die verschiedensten Lebensräume erobert und sind sowohl in den gemäßigten Zonen als auch in den Wüsten und den Tropen anzutreffen.

Im Folgenden wird eine spezielle Art von Geckos in drei verschiedenen Regionen A, B, C in den Tropen untersucht. Die drei Regionen bieten den Geckos ganz unterschiedliche Lebensbedingungen, die sich durch besondere Vegetationsformen, Temperatur- und Niederschlagsvariabilität auszeichnen. Vereinfachend wird angenommen, dass sich die Geckos in jeder Region in zwei Altersklassen aufteilen lassen: Jungtiere (J) und Alttiere (S).

Die Entwicklung der Geckos in den Regionen lässt sich – unter Vernachlässigung von Wanderbewegungen von einer Region in die anderen – für einen Beobachtungszeitraum von einem Jahr näherungsweise folgendermaßen modellieren:

Region A: 30 % der Alttiere bekommen durchschnittlich einen Nachfahren.
90 % der Jungtiere verbleiben in ihrer Klasse, 10 % Jungtiere wechseln die Altersklasse.
Die Sterblichkeit der Alttiere beträgt 30 %.

Region B: 20 % der Alttiere und 35 % der Jungtiere haben durchschnittlich einen Nachfahren.
55 % der Jungtiere verbleiben in ihrer Klasse, 40 % der Jungtiere erreichen das Alttieralter. Die Sterblichkeit der Alttiere beträgt 30 %.

a) Ordnen Sie begründet die Matrizen K und L den Gecko-Entwicklungen in den beiden Regionen A und B zu.

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie für die Region A und B die Entwicklungsmodelle mit je einem Graphen dar. **(15P)**

Ein Forscherteam junger Biologen möchte die Entwicklung der Geckos in Abhängigkeit von den Umweltbedingungen untersuchen. Dazu steckt es in den Regionen A und B Gebiete ab, in denen sich zum Untersuchungszeitpunkt genau 1000 Jungtiere und 2000 Alttiere aufhalten.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Populationsmatrizen für beide Gebiete die Anzahl der Geckos jeder Klasse nach einem und nach zwei Jahren.

Bestimmen Sie für beide Gebiete den Bestand nach 20 Jahren mit Hilfe der Matrizen K^{10} bzw. L^{10}. Es gilt:

$$K^{10} \approx \begin{pmatrix} 1{,}729 & 0{,}864 \\ 1{,}729 & 0{,}865 \end{pmatrix} \qquad L^{10} \approx \begin{pmatrix} 0{,}752 & 0{,}745 \\ 0{,}248 & 0{,}255 \end{pmatrix}$$ **(20P)**

Im folgenden Aufgabenteil geht es jeweils um die Größe der gesamten Geckopopulation, also um die Summe der Jung- und Alttiere. Neben den Gebieten *A* und *B* wird außerdem ein Gebiet in einer Region *C* betrachtet. Die Entwicklung der Geckozahlen in diesem Gebiet ist in folgender Tabelle dargestellt.

Zeit t	Populationsvektoren für Gebiet C:
0	$\vec{p}_0$ = (4000 | 2000)
1	$\vec{p}_1$ = (2800 | 2200)
2	$\vec{p}_2$ = (2120 | 2100)
10	$\vec{p}_{10}$ = (526 | 673)
20	$\vec{p}_{20}$ = (111 | 143)

c) Vergleichen Sie anhand Ihrer Ergebnisse und unter Berücksichtigung der tabellierten Werte die Entwicklungen der Geckozahlen in allen drei Gebieten miteinander.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Wertepaare für $t = 0$ und $t = 20$ für jedes Gebiet eine Exponentialfunktion vom Typ $f(t) = c \cdot a^t$ zur diskreten Beschreibung der Gecko-Entwicklung. Dabei soll *f(t)* die Gesamtzahl der Geckos in Abhängigkeit von der Zeit *t* in Jahren darstellen.

Bestimmen Sie, nach wie vielen Jahren in den Gebieten B und C gleich viele Geckos leben. **(20P)**

Wanderbewegungen zwischen den Regionen blieben bisher unberücksichtigt. Tatsächlich wandern aber jährlich 5 % der Alttiere von Region B nach Region A. 10 % der Jungtiere wandern von Region A nach Region B über. Die bereits erwähnte hohe Anpassungsfähigkeit der Geckos führt dazu, dass sich die Tiere in ihrer Populationsentwicklung sofort den ansässigen Geckos anpassen.

d) Die Population in beiden Regionen wird durch den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} J_A & S_A & J_B & S_B \end{pmatrix}^T$ angeben. Leiten Sie für die neue Situation einen Übergangsgraphen her.

Ermitteln Sie eine modifizierte Übergangsmatrix *P* und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **(20P)**

Im letzten Aufgabenteil wird erneut die Matrix *L* aus Teil a) betrachtet. Sie lässt sich mit einer Transformationsmatrix *T*, deren „inverser Matrix“ T^{-1}, sofern diese existiert, und einer Diagonalmatrix *D* schreiben als $L = T \cdot D \cdot T^{-1}$ $(*)$.

e) Bestätigen Sie, dass mit $T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung $(*)$ erfüllt wird.

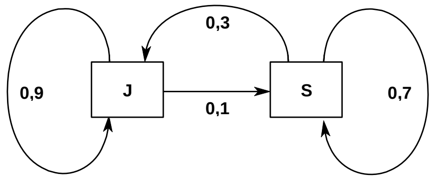
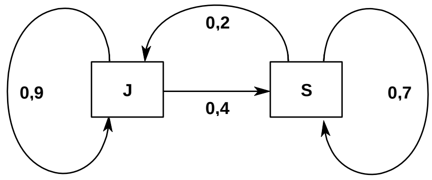
- Leiten Sie mit der Gleichung (*) eine Formel für L^n her. Verwenden Sie dabei die Eigenschaft inverser Matrizen: $T^{-1} \cdot T = E$, wobei *E* die Einheitsmatrix ist.
- Begründen Sie, dass sich die Potenzen L^n selbst für große n mit dieser Formel auch ohne Computereinsatz recht leicht berechnen lassen. Berechnen Sie mit Ihrer Formel nun selbst die Matrix L^{10}, die Ihnen in Teil b) vorgegeben war. **(25 P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

a)

Korrekte Zuordnung:

Region / Gebiet:	Matrix:	Graph:
A	$L=\begin{pmatrix}0,9 & 0,3\\ 0,1 & 0,7\end{pmatrix}$	
B	$K=\begin{pmatrix}0,9 & 0,2\\ 0,4 & 0,7\end{pmatrix}$	

Begründung:

Das erste Matrixelement der ersten Zeile ergibt sich aus der Addition des Anteils der Jungtiere, die im nächsten Zeitschritt (Jahr) in der Klasse der Jungtiere verbleiben, und des Anteils der Geburtenrate der Jungtiere.
Wie man feststellt, bekommen nicht in jeder Region die Jungtiere Nachfahren.
Das zweite Element der ersten Zeile gibt die Geburtenrate der Alttiere an.

Das erste Matrixelement der zweiten Zeile enthält die Übertrittsrate von den Jungtieren zu den Alttieren; das zweite Element gibt die Verbleiberate / Überlebensrate der Alttiere an.

Hinweis: Für die Begründung ist die volle Punktzahl auch zu geben, wenn ein Prüfling die Zuordnung nur anhand eines in beiden Matrizen unterschiedlichen Elementes begründet.

I	II	III
10	5	

b)

Berechnung der Populationsvektoren:

$\vec{p}_{t+1}=K\cdot\vec{p}_t$ bzw. $\vec{p}_{t+1}=L\cdot\vec{p}_t$ mit $t\in\mathbb{N}$.

Für Gebiet A:

$$\vec{p}_1=L\cdot\vec{p}_0=\begin{pmatrix}0,9 & 0,3\\ 0,1 & 0,7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1000\\ 2000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1500\\ 1500\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2=L\cdot\vec{p}_1=\begin{pmatrix}0,9 & 0,3\\ 0,1 & 0,7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1500\\ 1500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1800\\ 1200\end{pmatrix}$$

Für Gebiet B ergibt die analoge Rechnung:

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1300\\ 1800\end{pmatrix}\text{ und }\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1530\\ 1780\end{pmatrix}.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

Berechnung der Populationen nach 20 Jahren:

$$\vec{p}_{20} = K^{20} \cdot \vec{p}_0 = K^{10} \cdot K^{10} \cdot \vec{p}_0 = \left(K^{10}\right)^2 \cdot \vec{p}_0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}_{20} = L^{20} \cdot \vec{p}_0 .$$

<u>Für Gebiet A:</u>

$$\vec{p}_{10} = L^{10} \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0,752 & 0,745 \\ 0,248 & 0,255 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2242 \\ 758 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{20} = L^{10} \cdot \vec{p}_{10} = \begin{pmatrix} 2251 \\ 749 \end{pmatrix}$$

Für Gebiet B ergibt die analoge Rechnung $\vec{p}_{10} = \begin{pmatrix} 3457 \\ 3459 \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_{20} = \begin{pmatrix} 8966 \\ 8969 \end{pmatrix}$.

		I	II	III
		10	10	

c)

Zeit in Jahren	Anzahl der Geckos im Gebiet A	Anzahl der Geckos im Gebiet B	Anzahl der Geckos im Gebiet C
0	3000	3000	6000
1	3000	3100	5000
2	3000	3310	4220
10	3000	6916	1199
20	3000	17935	254

Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region A bleibt konstant bei 3000.
Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region B scheint exponentiell zu wachsen.
Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region C scheint exponentiell zu fallen. Die Geckos werden aussterben.

<u>Funktionsgleichungen:</u>

Gebiet A: $f(t) = 3000 \cdot 1^t = 3000$

Gebiet B: $f(t) = 3000 \cdot 1,0935^t$

Gebiet C: $f(t) = 6000 \cdot 0,8538^t$

Zur Ermittlung des Zeitpunktes gleicher Geckozahlen in B und C werden die Funktionsterme gleichgesetzt:

$$3000 \cdot 1,0935^t = 6000 \cdot 0,8538^t$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1,0935 - \log 0,8538}$$

$$t = 2,801...$$

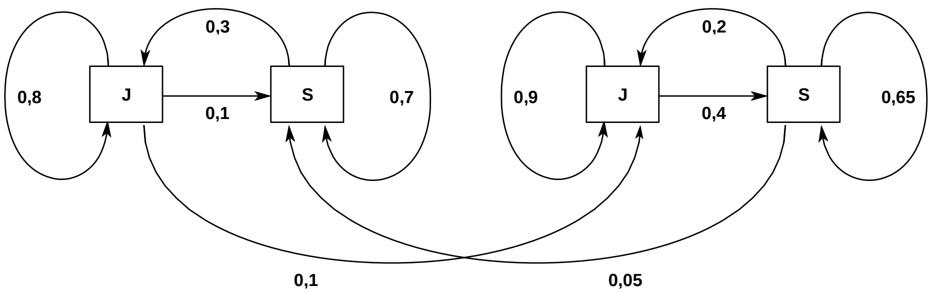
Im Laufe des dritten Jahres nach Beobachtungsbeginn werden die Zahlen übereinstimmen.

		I	II	III
c)			20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

d) Modifizierter Graph:

Region A — Region B



Modifizierte Matrix:

$$P=\begin{pmatrix} L_{\mathrm{mod}} & K_{neu} \\ L_{neu} & K_{\mathrm{mod}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0 & 0,05 \\ 0,1 & 0 & 0,9 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,65 \end{pmatrix}$$

Die Matrix P besteht aus den modifizierten Matrizen L_{mod} und K_{mod} und den Matrizen K_{neu} und L_{neu}. Diese beiden modifizierten Matrizen unterscheiden sich von L und K jeweils in genau einem Matrixelement.
Die Matrix L_{neu} enthält den Anteil der übersiedelnden Jungtiere; K_{neu} enthält den Anteil der auswandernden Alttiere.

	I	II	III
d)		10	10

e) Bestätigung:

$$L=T\cdot D\cdot T^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Beziehung bestätigt worden.

Potenzen der Matrix L:

Potenzen der Matrix L lassen sich besonders leicht berechnen, da man lediglich D^n bilden und dann die Multiplikation von links mit T und von rechts mit der Inversen von T durchführen muss.

Die Potenz einer Diagonalmatrix erhält man durch Potenzieren der Diagonalelemente.

Begründung:

Es gilt: $L^n=T\cdot D^n\cdot T^{-1}$. Etwas ausführlicher:

$$L^n=\left(T\cdot D\cdot T^{-1}\right)^n=T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot\ldots\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}=$$
$$=T\cdot D\cdot(T^{-1}\cdot T)\cdot D\cdot(T^{-1}\cdot\ldots\cdot T)\cdot D\cdot T^{-1}=T\cdot D\cdot E\cdot D\cdot E\cdot\ldots\cdot E\cdot D\cdot T^{-1}$$
$$=T\cdot D\cdot D\cdot\ldots\cdot D\cdot T^{-1}=T\cdot D^n\cdot T^{-1}.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Vorteil: Es lassen sich schnell die für die Untersuchung der Langzeitentwicklung der Geckos so wichtigen Potenzen der Populationsmatrizen bilden. Für die Berechnung reicht ein einfacher Taschenrechner mit den Grundrechenarten vollkommen aus. Für $n = 10$: $L^{10} = T \cdot D^{10} \cdot T^{-1}$ $= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -0{,}6^{10} & 3 \\ 0{,}6^{10} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ $\approx \begin{pmatrix} 0{,}752 & 0{,}745 \\ 0{,}248 & 0{,}255 \end{pmatrix}.$	5	10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20