LA/AG 2

II.2 Kranke Hühner

In einer Geflügelfarm bricht eine Viruserkrankung aus, die für die Tiere teilweise tödlich verläuft, für Menschen aber ungefährlich ist, wenn das Fleisch durchgebraten verzehrt wird. Eine Forschungseinrichtung beobachtet den Krankheitsverlauf und modelliert diesen mittels einer Übergangsmatrix H, wobei sich der Bestandsvektor $\overrightarrow{p_n}$ nach einem Zeittakt zum Bestandsvektor $\overrightarrow{p_{n+1}}$ gemäß folgender Modellgleichung entwickelt: $\vec{p}_{n+1} = H \cdot \vec{p}_n$ (ein Zeittakt ist eine Woche).

Tabelle:

zu \ von	G	K	T
G	0,3	0,1	0
K	0,7	0,7	0
T	0	0,2	1

Übergangsmatrix $H = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,7 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{p_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(G: gesunde Tiere, K: kranke Tiere, T: gestorbene Tiere, sowie x_n, y_n, z_n als Anzahlen nach n Wochen)

a) Stellen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen dar. **(5P)**

b) Es gelten: $H^2 = \begin{pmatrix} \boxed{0,16} & 0,1 & 0 \\ 0,7 & 0,56 & 0 \\ 0,14 & 0,34 & 1 \end{pmatrix}$ und $H^4 = \begin{pmatrix} 0,0956 & 0,072 & 0 \\ \boxed{0,504} & 0,3836 & 0 \\ 0,4004 & 0,5444 & 1 \end{pmatrix}$

- Bestätigen Sie durch Rechnung die Richtigkeit der eingerahmten Zahlen in den angegebenen Matrizen.
- Beurteilen Sie die folgenden Aussagen zu dem linken oberen Matrixwert 0,16 der Matrix H^2 hinsichtlich ihres Wahrheitsgehaltes im Modell:

  (A1) Der Anteil der ursprünglich gesunden Hühner, die während der letzten zwei Wochen gesund waren, beträgt 16 %.

  (A2) Von 100 gesunden Hühnern sind nach zwei Wochen 16 gesund.

  (A3) Der Anteil der ursprünglich gesunden Hühner, die in zwei aufeinander folgenden Wochen gesund waren, ist kleiner als 16 %.

- Beschreiben Sie einen *Rechenweg*, wie mit wenigen Matrizenmultiplikationen eine längerfristige Prognose für einen weit in der Zukunft liegenden Zeitpunkt innerhalb dieses Modells erstellt werden kann. **(20P)**

c) In einem gesunden Bestand von insgesamt 2 500 Tieren bricht diese Infektion aus. Der Hof wird isoliert und von einer Arbeitsgruppe der Forschungseinrichtung beobachtet.

- Berechnen Sie die erwarteten Bestände, die sich ausgehend von dem Modell nach einer bzw. nach acht Wochen seit Ausbruch der Krankheit einstellen müssten.

- Man kann erkennen, dass sich der Vektor $\vec{p}_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ mit $z \in \mathbb{N}$ in diesem Modell

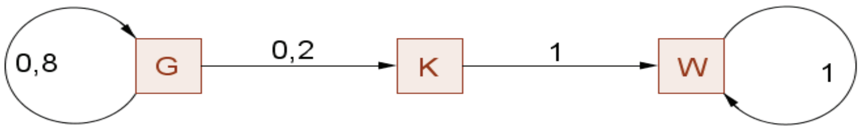
  nicht mehr ändert, denn alle Hühner, die gestorben sind, bleiben auch tot.
  Unklar ist noch, ob dies der einzige mögliche stationäre Zustand ist.

  Untersuchen Sie, ob sich mit einem geeigneten Vektor $\vec{p}_{stat}$ ein von $\overrightarrow{p_*}$ verschiedener stationärer Zustand einstellen kann, sich die Zusammensetzung der Population in einem Zeitschritt also nicht mehr ändert.

- Im Beobachtungsprotokoll taucht der Bestandsvektor $\vec{p}_n = \begin{pmatrix} 1500 \\ 550 \\ 450 \end{pmatrix}$ auf.

  Entscheiden Sie, ob dieser Vektor im Rahmen des Modells aus einem geeigneten Vorbestandsvektor $\vec{p}_{n-1}$ entstanden sein kann. **(30P)**

Aufgrund eines neu gewonnenen Impfstoffes stirbt kein Tier mehr – die Erkrankung verläuft deutlich abgemildert. Die neue Situation findet sich im folgenden Übergangsgraphen wieder, wobei (G) für die *durchgängig* gesunden Tiere steht, also jene, die bisher noch nicht erkrankt sind, (K) für die kranken und (W) für die wieder gesundeten, also jene, die die Krankheit einmal überstanden haben:



d) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix H_{neu} an.
Interpretieren Sie die gegenüber H veränderten Matrixelemente im Sachkontext der Aufgabe. **(10P)**

e) Da kranke Tiere schlechter fressen und deshalb in dieser Zeit kaum an Gewicht zunehmen, erwartet man, dass einmal krank gewordene Tiere ein geringeres Endgewicht als durchgängig gesunde Hühner haben. Landwirte interessiert daher die zu erwartenden prozentualen Anteile.
Die Tabelle enthält diese Anteile für die ersten vier Wochen nach einer Infektion.

Anzahl der Wochen seit der Infektion	0	1	2	3	4
Anteil der durchgängig gesunden Tiere in %	100	80	64	51,2	40,96
Anteil der (aktuell) kranken Tiere in %	0	20	16	12,8	10,24
Anteil der wieder gesundeten Tiere in %	0	0	20	36	48,8

- Begründen Sie mithilfe des Graphen oder der Matrix H_{neu}, dass die Modellierung für den Anteil der durchgängig gesunden Hühner durch eine Exponentialfunktion $g: n \to g(n)$ mit der Zeit n in Wochen sinnvoll ist.
  Geben Sie eine passende Gleichung für diese Funktion an.

- Der Anteil $k(n)$ der in der n-ten Woche kranken Tiere wird durch die Funktionsgleichung $k(n) = 25 \cdot 0{,}8^n$ für $n > 0$ modelliert.
  Bestätigen Sie diese Gleichung beispielhaft für zwei Tabellenwerte.

- Auch der Anteil der einmal erkrankten und nun wieder gesundeten Hühner lässt sich ab der zweiten Woche durch eine Funktion $w: n \to w(n)$ modellieren.
  Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für w für $n \geq 2$.

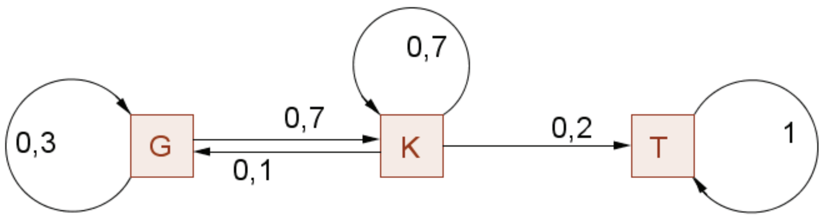
- Untersuchen Sie die drei Funktionen g, k und w hinsichtlich einer langfristigen Entwicklung der Teilpopulationen und treffen Sie eine begründete Aussage zu möglichen stabilen Zuständen einer Hühnerpopulation im Rahmen des betrachteten Modells. **(20P)**

f) In der vorigen Aufgabe ist es mit einfachen Mitteln der Analysis gelungen, Aussagen über die modellhafte Entwicklung einer Population herauszufinden. Ein anderer Weg führt über die Berechnung und Interpretation von Eigenwerten.
Dabei heißt die Gleichung: $H_{neu} \cdot \vec{p}_{eig} = \lambda \cdot \vec{p}_{eig}$ *Eigenwertgleichung* der Matrix H_{neu} mit reellem Eigenwert λ und Eigenvektor $\overrightarrow{p_{eig}} \neq 0$.

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix H_{neu}.

- Interpretieren Sie diese Ergebnisse hinsichtlich der langfristigen Entwicklung und möglicher stabiler Zustände einer Modellpopulation. Klären Sie insbesondere, ob sich daraus dieselben Schlüsse wie in Teil e) ziehen lassen. **(15P)**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td></td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Die Zahlen stimmen nach den Regeln der Matrizenmultiplikation:

  $H^2_{[1;1]} = 0{,}16 = 0{,}3^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0 \cdot 0$

  $H^4_{[2;1]} = 0{,}504 = 0{,}7 \cdot 0{,}16 + 0{,}56 \cdot 0{,}7 + 0 \cdot 0{,}14$

- 0,16 beschreibt den Anteil der gesunden Tiere, die zwei Wochen später gesund sind. Aus der obigen Gleichung erkennt man, dass dazu sowohl gesunde als auch in der Vorwoche kranke Tiere gehören. Daraus folgt, dass nur die Aussagen (A2) und (A3) wahr sind.
- Setzt man $\vec{p}_o$ als Startvektor der Population zum Zeitpunkt $t = 0$, dann gilt:

  $H \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_1$

  $H^2 \cdot \vec{p}_0 = H \cdot \vec{p}_1 = \vec{p}_2 \ldots$

  ...

  $H^n \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_n$

  d. h. die Population nach n Wochen wird durch die Multiplikation des Startvektors mit der n-ten Potenz der Matrix H erreicht. Um hohe Matrixpotenzen mit wenigen Matrizenmultiplikationen zu bekommen, multipliziert man die Matrixpotenzen mit sich selbst:

  $H^2 = H \cdot H \qquad H^4 = H^2 \cdot H^2 \qquad H^8 = H^4 \cdot H^4$ usw.

</td><td>5</td><td>5</td><td>10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- Mit dem Startvektor $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 2500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  und der in b) beschriebenen Vorgehensweise ergeben sich

  $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 750 \\ 1750 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 400 \\ 1750 \\ 350 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_8 = H^4 \cdot H^4 \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} 114 \\ 604 \\ 1783 \end{pmatrix}.$

- Anzusetzen ist die Gleichung: $H \cdot \vec{p}_{stat} = \vec{p}_{stat}$ mit $\vec{p}_{stat} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

  Als Lösung ergibt sich $x = 0$ und $y = 0$ bei beliebigem z.

  Es gibt also keinen von $\vec{p}_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{N}$, verschiedenen stationären Vektor.

  Dieses Ergebnis wird auch schon unmittelbar aus der Übergangsmatrix bzw. dem Graphen klar, denn von der dritten Stufe (den toten Tieren) kann kein Exemplar in eine andere Stufe wechseln.

- Man betrachtet die Gleichung: $H \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 550 \\ 450 \end{pmatrix}.$

  Daraus ergibt sich das LGS (hier in Matrixschreibweise)

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 1500 \\ 0{,}7 & 0{,}7 & 0 & 550 \\ 0 & 0{,}2 & 1 & 450 \end{array}\right) \quad | \, II \cdot \left(-\tfrac{3}{7}\right) + I \quad \Rightarrow$

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 1500 \\ 0 & -0{,}2 & 0 & \frac{8850}{7} \\ 0 & 0{,}2 & 1 & 450 \end{array}\right) \Rightarrow y \approx -6321\,.$

- Eine Lösung existiert zwar, $\overrightarrow{p_{n-1}} \approx \begin{pmatrix} 7107 \\ -6321 \\ 1714 \end{pmatrix}$, aber negative Vektorkomponenten können nicht in einem Bestandsvektor auftreten, d. h. der gegebene Vektor kann nicht im Rahmen der Beobachtung entstanden sein.

</td><td>5</td><td>25</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Es ergibt sich die Matrix $H_{neu} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
dabei ist der Anteil der gesund bleibenden Hühner $H_{neu[1,1]} = 0,8$ deutlich gestiegen, bzw. $H_{neu[2,1]} = 0,2$. Kein krankes Tier verbleibt im Krankheitszustand $H_{neu[2,2]} = 0$, d. h. sie gesunden (schneller als vorher); alle kranken Tiere $H_{neu[3,2]} = 1$ werden wieder gesund – dieser Zustand unterscheidet sich aber vom ersten Zustand (d. h. den immer gesunden).
Anmerkung: Zusätzlich gilt, dass es einen Rückfall in die Krankheit nicht gibt: $H_{neu[2,3]} = 0$.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Der exponentielle Ansatz ergibt sich unmittelbar aus dem Graphen. Da in diesem Beispiel nur gesunde Tiere zu der Gruppe der Gesunden übergehen können, ergibt sich der Anteil der (immer noch) gesunden Hühner aus dem Startwert durch n-fache Multiplikation mit dem Faktor 0,8.
Als Gleichung erhält man so : $g(n) = 100 \cdot (0,8)^n$.
z. B. $25 \cdot 0,8 = 20 \quad ... \quad 25 \cdot (0,8)^4 = 10,24$
Bei der Bestätigung durch Tabellenwerte ist darauf zu achten, dass der erste Tabellenwert $n = 0$ nicht in die Gleichung eingesetzt werden darf.
Der Anteil der wieder gesundeten Tieren ergibt sich aus dem Gesamtbestand (100%) von dem der Anteil der durchgängig gesunden sowie der kranken Tiere abgezogen wird:
$w(n) = 100 - 100 \cdot (0,8)^n - 25 \cdot (0,8)^n = 100 - 125 \cdot (0,8)^n$ für $n \geq 2$.
Innermathematisch bedeutet dies, den Grenzwert $n \to \infty$ zu betrachten. Aus den Funktionsgleichungen folgt unmittelbar
$$\left.\begin{aligned} g(n) &\to 100 \cdot 0 = 0 \\ k(n) &\to 25 \cdot 0 = 0 \\ w(n) &\to 100 - 125 \cdot 0 = 100 \end{aligned}\right. \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$
d. h. perspektivisch werden alle Hühner die Erkrankung durchmachen, aber wieder gesunden. Der einzig mögliche stabile Zustand ist also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$
(der Anteile in Prozent).
In einem realen Hühnerstall leben die Tiere aber nur eine begrenzte Zeitspanne, sodass dies tatsächlich nur ein theoretisches Ergebnis bleibt.
</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	• Mit der Gleichung $H_{neu} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ergibt sich $\begin{matrix} (I) & 0{,}8x & = & \lambda x \\ (II) & 0{,}2x & = & \lambda y \\ (III) & y+z & = & \lambda z \end{matrix}$. Für den Fall $x \neq 0$ ergibt sich aus der ersten Gleichung unmittelbar $\lambda_1 = 0{,}8$. Setzt man dagegen $x = 0$ und $y \neq 0$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung der zweite Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Der dritte Eigenwert $\lambda_3 = 1$ lässt sich mithilfe der dritten Gleichung unter der Bedingung $x = y = 0$ bestimmen. Setzt man diese Eigenwerte ein, dann ergeben für die Eigenvektoren: $\lambda_1 = 0{,}8 \Rightarrow \begin{matrix} (I) & 0{,}8 \cdot x & = & 0{,}8 \cdot x \\ (II) & 0{,}2 \cdot x & = & 0{,}8 \cdot y \\ (III) & y+z & = & 0{,}8 \cdot z \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{p_{eig\_1}} = \begin{pmatrix} x \\ 0{,}25 \cdot x \\ -1{,}25 \cdot x \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} (I) & 0{,}8 \cdot x & = & 0 \cdot x \\ (II) & 0{,}2 \cdot x & = & 0 \cdot y \\ (III) & y+z & = & 0 \cdot z \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{p_{eig\_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}$ und für $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \begin{matrix} (I) & 0{,}8 \cdot x & = & 1 \cdot x \\ (II) & 0{,}2 \cdot x & = & 1 \cdot y \\ (III) & y+z & = & 1 \cdot z \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{p_{eig\_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ *Hinweis: Auch der Weg über Determinanten ist möglich.* • $\lambda_3 = 1$ ist der betragsgrößte Eigenwert. Das bedeutet, dass sich bei beliebigem Startvektor (*den Nullvektor kann man bei diesen Betrachtungen aus nahe liegenden Gründen ausschließen*) die Population langfristig auf einen stabilen Zustand einstellt. Aus dem zugehörigen Eigenvektor $\overrightarrow{p_{\max}} = \overrightarrow{p_3}$ liest man ab, dass die Population langfristig nur aus Tieren der dritten Teilpopulation (hier die gesundeten Hühner) bestehen wird. • Während die Theorie zulässt, dass mit beliebigen Startvektoren gearbeitet werden kann – und demzufolge unterschiedliche Endzustände (*z* ist variabel) erreicht werden könnten – lässt dies die Betrachtung über die Funktionen aus Teil e) und die Beschränkung auf den Sachkontext nicht zu, da dort mit prozentualen Anteilen gearbeitet wird.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25