

II.2 Fischzucht

Fischliebhaber haben einen Teich gepachtet, um Fische zu züchten. Sie haben sich über die Entwicklung der Fische informiert und Folgendes in Erfahrung gebracht:

Nur die Altfische (**A**) legen Eier, aus denen sich ein Teil im ersten Jahr zu Jungfischen (**J**) entwickelt. Jeder Altfisch erzeugt auf diesem Wege im Durchschnitt 45 Jungfische.

Aus 10 % der Jungfische werden im zweiten Jahr Fische mittleren Alters (**M**), der Rest verstirbt oder wird gefressen.

Aus den Fischen mittleren Alters werden im darauf folgenden Jahr Altfische.



Die Überlebensrate der Fische mittleren Alters beträgt 20 %. Von den Altfischen überleben 50 % und verbleiben in ihrer Klasse.

Somit ergibt sich eine Übergangsmatrix folgender Form:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \text{bezogen auf den Populationsvektor} \begin{bmatrix} J \\ M \\ A \end{bmatrix}$$

- a) Geben Sie für den oben beschriebenen Sachverhalt die Übergangsmatrix A mit den entsprechenden Zahlenwerten an und zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. **(15P)**

Die Züchter setzen im ersten Jahr 5000 Jungfische und 1000 Fische mittleren Alters aus.

- b) Bestätigen Sie, dass der Bestand nach drei Jahren aus 9000 Jungfischen, 900 Fischen mittleren Alters und 100 Altfischen besteht. **(15P)**

Dieser Bestand (siehe Teilaufgabe b)) soll im Folgenden als Startpopulation gelten. Die Züchter beschließen, ab jetzt die Altfische nach der Eiablage abzufischen. Dies gilt für die folgenden Teilaufgaben, falls keine anderslautenden Angaben vorliegen.

Die zugehörige Übergangsmatrix hat die Form $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix}$

Für eine Matrix dieser Form gilt: $B^3 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 \cdot v & 0 & 0 \\ 0 & a_1 \cdot a_2 \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \cdot a_2 \cdot v \end{bmatrix}$

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

- c) • Ermitteln Sie B^3 für die Fischpopulation und bestimmen Sie mit deren Hilfe den Bestand nach 3, 6 und 18 Jahren.
- Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der langfristigen Entwicklung der Population. **(20P)**

- d) Nach einigen Jahren befinden sich
3870 Jungfische,
215 Fische mittleren Alters und
86 Altfische
im Teich.
Ermitteln Sie die Vorjahrespopulation. **(10P)**

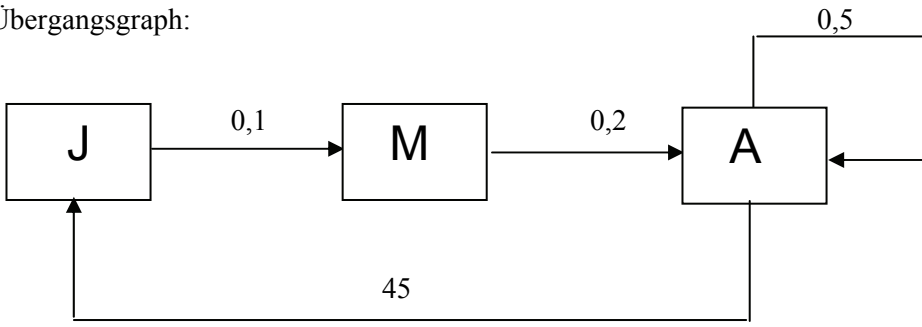
Die Fischzüchter möchten erreichen, dass der Bestand im 3-Jahres-Zyklus stabil bleibt. Hierzu soll die Vermehrungsrate v der Altfische gesteigert werden. Dies wollen die Züchter erreichen, indem sie einen Teil der Eiablage in einem geschützten Zuchtbecken verwahren, um mehr Jungfische zu erhalten.

- e) Ermitteln Sie, bei welcher Vermehrungsrate v die Startpopulation im 3-Jahres-Zyklus stabil bleiben würde. **(10P)**

Die Versuche mit dem Zuchtbecken wurden wieder eingestellt, weil sie aufwändig und von wenig Erfolg gekrönt waren. Die Fischzüchter würden nun gerne einen Bestand haben, der sich jährlich reproduzieren soll. Sie sind bereit, dafür auf das Abfischen eines Teils der Altfische zu verzichten. Ein erfahrener Züchter sagt ihnen, dass sie trotzdem 80 % der Altfische nach der Eiablage abfischen können, wenn sie eine geeignete Startpopulation haben.

- f) Begründen Sie, dass die Überlebensrate der Altfische für die weiteren Berechnungen dann $a_3 = 0,1$ beträgt und geben Sie die neue Übergangsmatrix C an. **(10P)**
- g) Zeigen Sie, dass es für die neue Übergangsmatrix C eine Population mit 9000 Jungfischen gibt, welche sich jährlich reproduzieren würde. **(20P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Übergangsmatrix: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$</p> <p>Übergangsgraph:</p> 	10	5	
b)	<p>Anfangsbestand: $\vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 5000 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$</p> <p>$\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 500 \\ 200 \end{bmatrix}$, $\vec{p}_2 = A \cdot \vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 9000 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$, $\vec{p}_3 = A \cdot \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 9000 \\ 900 \\ 100 \end{bmatrix}$</p> <p>Nach drei Jahren existieren 9000 Jungfische, 900 Fische mittleren Alters und 100 Altfische.</p>	15		
c)	<p>Form der 3. Potenz gegeben: $a_1 \cdot a_2 \cdot v = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 45 = 0,9 \Rightarrow B^3 = 0,9 \cdot E$.</p> <p>Eine aufwändigere Lösung wäre, B^3 wie folgt zu berechnen:</p> $B \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4,5 \\ 0,02 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^2$ $B \cdot B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4,5 \\ 0,02 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix} = B^3 = 0,9 \cdot E$ <p>$\vec{p}_3 = B^3 \cdot \vec{p}_0 = 0,9 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 8100 \\ 810 \\ 90 \end{bmatrix}$</p>			

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$\vec{p}_6 = B^6 \cdot \vec{p}_0 = (B^3)^2 \cdot \vec{p}_0 = 0,9^2 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = 0,81 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 7290 \\ 729 \\ 81 \end{bmatrix}$ $\vec{p}_{18} = B^{18} \cdot \vec{p}_0 = (B^3)^6 \cdot \vec{p}_0 = 0,9^6 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = 0,5314 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 4783 \\ 478 \\ 53 \end{bmatrix}$ <p>Leichte Abweichungen bei der letzten Lösung können durch Rundungen entstehen.</p> <p>Interpretation der Lösungen: Die Population stirbt aus, da sie im 3-Jahres-Zyklus um 10 % abnimmt, bzw. $0,9^n$ konvergiert gegen 0.</p>		10	10
d)	<p>Ansatz:</p> $\vec{P}_{\text{aktuell}} = B \cdot \vec{P}_{\text{Vorjahr}}$ $\begin{bmatrix} 3870 \\ 215 \\ 86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ <p>I Anzahl der Altfische: $45x_3 = 3870 \Rightarrow x_3 = 86$</p> <p>III Anzahl der Fische mittleren Alters: $0,2 x_2 = 86 \Rightarrow x_2 = 430$</p> <p>II Anzahl der Jungfische: $0,1 x_1 = 215 \Rightarrow x_1 = 2150.$</p>		10	
e)	<p><u>Lösungsvariante 1:</u></p> <p>Für eine Matrix, die im 3-Jahres-Zyklus stabil bleibt gilt:</p> $a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1 \text{ und damit } v = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} = \frac{1}{0,1 \cdot 0,2} = 50.$ <p>Bei einer Vermehrungsrate von 50 Jungfischen pro Altfisch würde der Bestand im 3-Jahres-Zyklus stabil bleiben.</p> <p><u>Lösungsvariante 2:</u></p> <p>Mit $a_1 = 0,1$ und $a_2 = 0,2$ gilt:</p> $\begin{bmatrix} 0,02 \cdot v & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \cdot v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5000 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$ <p>I: $100 \cdot v = 5000 \Rightarrow v = 50$</p> <p>II: $20 \cdot v = 1000 \Rightarrow v = 50$</p> <p>III: $0 = 0$</p>		10	

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>Wenn von den überlebenden Altfischen 80 % abgefischt werden, so verbleiben 20 %, von denen – wie bekannt – 50 % überleben. Also überleben 10 % der ursprünglichen Altfische.</p> <p>Damit lautet $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$.</p>	5	5	
g)	<p>$\vec{p}_0 = C \cdot \vec{p}_0$</p> $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9000 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 45x_3 = 9000 & x_3 = 200 \\ 900 = x_2 & \Rightarrow x_2 = 900 \\ 0,2x_2 + 0,1x_3 = x_3 & 0,2x_2 - 0,9x_3 = 0 \end{matrix}$ <p>Somit ergibt sich eine Startpopulation von $p_0 = \begin{bmatrix} 9000 \\ 900 \\ 200 \end{bmatrix}$.</p> <p>Es müssen also einmalig noch 100 Altfische zusätzlich ausgesetzt werden, um eine sich jährlich reproduzierende Startpopulation zu erhalten.</p> <p><i>Andere Lösungsvarianten sind denkbar.</i></p>		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20