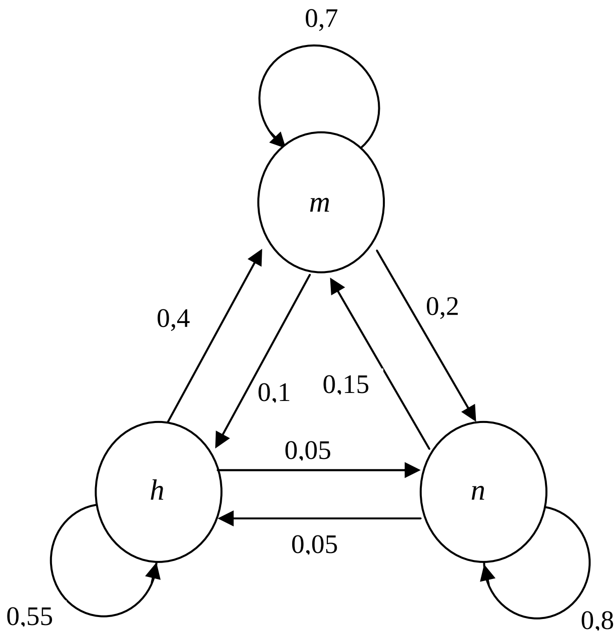
LA/AG 2

II.2 Einkommensgruppen

Die Familien eines fiktiven Landes werden einer der drei angegebenen Einkommensgruppen zugeordnet. In statistischen Erhebungen hat man festgestellt, dass Kinder der Eltern einer bestimmten Einkommensgruppe nach ihrer Ausbildung auch einer anderen Einkommensgruppe angehören können.
Es wird angenommen, dass 10 % der Einkommensgruppe hoch (*h*), 60 % der Einkommensgruppe mittel (*m*) und 30 % der Einkommensgruppe niedrig (*n*) angehören. Vereinfachend wird angenommen, dass jede Familie genau zwei Kinder hat und in der nächsten Generation jedes Kind mit einem Kind einer anderen Familie wieder eine Familie gegründet hat.

a) Es werden 4200 Familien nach repräsentativen Grundsätzen ausgewählt.
Berechnen Sie die Anfangsverteilung $\vec{p}_0$ der ausgewählten Bevölkerungsgruppe. **5 P**

Die nachfolgende Abbildung gibt für jede Einkommensgruppe an, welche Anteile dieser Gruppe von einer Generation zur nächsten die Gruppe wechseln bzw. in der Gruppe bleiben.



$$P=\begin{pmatrix}\frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20}\\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20}\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}11 & 2 & 1\\ 8 & 14 & 3\\ 1 & 4 & 16\end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie anhand des Graphen, dass dieser Prozess durch die Übergangsmatrix *P* beschrieben werden kann und berechnen Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_1$ in der nächsten Generation.
20 P

c) Ermitteln Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_{-1}$ der Elterngeneration der ersten Gruppe.
Setzen Sie dabei voraus, dass obiges Modell auch schon bei dieser Generation galt. **20 P**

Nach einigen Jahren stellt man fest, dass Eltern der hohen Einkommensgruppe durchschnittlich nur ein Kind bekommen, in der mittleren Einkommensgruppe dagegen zwei Kinder und in der niedrigen Einkommensgruppe drei Kinder geboren werden.

d) Ermitteln Sie die modifizierte Übergangsmatrix und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **15 P**

(*Hinweise:*
Überlegen Sie, welche Matrixelemente jeweils die Entwicklung einer Gruppe repräsentieren.

Kontrollergebnis: $P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 8 & 28 & 9 \\ 1 & 8 & 48 \end{pmatrix}$)

e) Berechnen Sie die Einkommensverteilung in den nächsten beiden Generationen.
Vergleichen Sie das modifizierte Modell hinsichtlich der Entwicklung der Gesamtzahl der Familien mit dem ursprünglichen Modell. **20 P**

Bei einigen Populationsmatrizen A erhält man die Einheitsmatrix E durch Mehrfachmultiplikation der Matrix A mit sich selbst, also $A^n = E$ *für bestimmte* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Die Einheitsmatrix E erhält man aber auch durch Multiplikation der Matrix A mit ihrer „inversen Matrix“ A^{-1}, sofern diese existiert, also $A \cdot A^{-1} = E$.

Gegeben ist nun die allgemeine Populationsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$.

f) Bestimmen Sie die Matrizen A^2 und A^3 und ermitteln Sie die Bedingungen für a, b und c, damit gilt: $A^3 = E$.
Interpretieren Sie für diesen Fall die Bedeutung der Matrix A^2. **15 P**

g) Interpretieren Sie dieses Phänomen für die Entwicklung einer zugehörigen Population. **5 P**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Aus der prozentualen Verteilung ergibt sich die Anzahl der Familien in den drei Einkommensgruppen als Bestandsvektor $\vec{p}_0$: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$

</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

In der ersten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe h in der nächsten Generation: 55 % von ihnen bleiben in Gruppe h, 40 % wechseln in Gruppe m, 5 % wechseln in Gruppe n.

In der zweiten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe m in der nächsten Generation: 10 % von ihnen wechseln in Gruppe h, 70 % bleiben in Gruppe m, 20 % wechseln in Gruppe n.

In der dritten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe n in der nächsten Generation: 5 % von ihnen wechseln in Gruppe h, 15 % wechseln in Gruppe m, 80 % bleiben in Gruppe n.

Die Übergangsmatrix P enthält die angegebenen Prozentsätze:

$$\vec{p}_1 = P \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 2121 \\ 1533 \end{pmatrix}.$$

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Möglicher Ansatz:

$$P \cdot \vec{p}_{-1} = \vec{p}_0 \text{ bzw. } \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit 20 ergibt das folgende Lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8\,400 \\ 8 & 14 & 3 & 50\,400 \\ 1 & 4 & 16 & 25\,200 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+16\cdot I]{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8\,400 \\ -25 & 8 & 0 & 25\,200 \\ 175 & 28 & 0 & 109\,200 \end{array}\right) \xrightarrow[III+7\cdot II]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8\,400 \\ -25 & 8 & 0 & 25\,200 \\ 0 & 84 & 0 & 285\,600 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} x_1, x_2 \text{ eingesetzt } \Rightarrow x_3 = 720 \\ x_2 \text{ eingesetzt liefert } x_1 = 80 \\ \text{Division durch } 84 \Rightarrow x_2 = 3400 \end{array}$$

Damit gilt für die Einkommensverteilung der Elterngeneration der ersten Gruppe, vorausgesetzt das obige Modell trifft auch hier noch zu:

$\vec{p}_{-1} = (80|3400|720)$

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Ein zweiter Lösungsweg ist über die Inverse der Populationsmatrix möglich.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe h müssen gegenüber der vorherigen Matrix halbiert werden; die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe n müssen gegenüber der vorherigen Matrix mit $\frac{3}{2}$ multipliziert werden. Also wird die erste Spalte der ursprünglichen Übergangsmatrix durch zwei geteilt und die dritte Spalte mit $\frac{3}{2}$ multipliziert.

$P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$\vec{p}_{Mod1} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 462 \\ 2131{,}5 \\ 2026{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix}.$

$\vec{p}_{Mod2} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 492{,}275 \\ 2040{,}875 \\ 2870{,}35 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 492 \\ 2041 \\ 2870 \end{pmatrix}$

Da in der Realität keine Bruchteile von Familien vorkommen, muss hier im Kontext der Aufgabenstellung gerundet werden. Dabei ist auch konsequentes Abrunden sinnvoll.

Da bei dem ursprünglichen Modell aus jedem Elternpaar wieder ein Kinderpaar, aus jedem Kinderpaar wieder ein Elternpaar entsteht usw., bleibt in diesem Modell die Gesamtzahl der Familien von Generation zu Generation konstant.

Dagegen steigt die Gesamtzahl der Familien in dem modifizierten Modell von Generation zu Generation an, weil die Anzahl der Kinder in der größeren Gruppe n der Familien mit niedrigem Einkommen von zwei auf drei gestiegen ist, während die Anzahl der Kinder in der kleineren Gruppe h der Familien mit hohem Einkommen von zwei auf eins gesunken ist.</td><td>10</td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Ermitteln von A^2 und A^3:
$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$
Also: $A^3 = E$, wenn gilt: $a \cdot b \cdot c = 1$.
Die Matrix A^2 ist in diesem Fall gleich der zu A inversen Matrix.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Für die Entwicklung der Population bedeutet dieses Phänomen, dass sich in einem Zyklus von drei Jahren stets wieder die Ausgangspopulation einstellt.</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>