

## II.2 Seeschildkröten

Grüne Seeschildkröten sind weltweit vom Aussterben bedroht. Die Gelege wurden von der ansässigen Bevölkerung oft ausgenommen, gejagt wurden sie wegen ihres Fleisches und der Panzer (Schildpatt wurde früher z.B. für Käbme und Brillenfassungen verwendet). Durch industriellen Fischfang mit riesigen Schleppnetzen und die Verschmutzung der Meere sind die Bestände dramatisch zurückgegangen. Durch den Massentourismus sind zudem weite Strände baulich erschlossen worden, an denen die Schildkröten ihre Eier abzulegen pfliegen. Gerade aber auch durch die Tourismusindustrie werden jetzt zunehmend Anstrengungen unternommen, Projekte zu fördern, um die Restbestände zu schützen.



Schwierig ist die Bestandsaufnahme und die Beobachtung der Populationen. Die weiblichen Schildkröten kommen nachts zur Eiablage an den Strand, graben Nester in den Sand und scharren sie nach der Eiablage zu. Die Eier reifen im Sand heran, und nach etwa zwei Monaten schlüpfen die kleinen Schildkröten. Sie rennen dann zeitgleich eines Nachts im wahrsten Sinne des Wortes um ihr Leben in Richtung Meer, da Raubvögel und Krebse sie bereits am Strand erwarten. Wenn sie die Geschlechtsreife erreicht haben, im Durchschnitt nach 25 Jahren, kehren die weiblichen Schildkröten an diesen Strand zur Eiablage zurück. In der Zwischenzeit legen sie im Meer Hunderte von Meilen zurück.

Die Anzahl der Gelege variiert, nicht jedes Jahr pflanzen sich Schildkröten fort. Gehen Sie davon aus, dass eine auf Hawaii „heimische“ Population zu Beobachtungsbeginn – nach der Eiablage – aus

- 60 000 Eiern ( $E$ ),
- 24 000 Jungschildkröten ( $J$ )
- 300 geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten ( $W$ ) besteht.

Die jährliche Entwicklung dieser Population wird durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0,05 & 0,89 & 0 \\ 0 & 0,0005 & 0,95 \end{pmatrix} \text{ beschrieben.}$$

- a) Stellen Sie die Entwicklung mit einem Übergangsgraphen dar und beschreiben Sie, welche Annahmen diesem Modell zugrunde liegen. Gehen Sie dabei auf alle von Null verschiedenen Elemente in dieser Matrix ein. **(20P)**
- b) Betrachtet man nur die Anzahlen der geschlechtsreifen Schildkrötenweibchen, so erhält man die folgende Wertetabelle:

Anzahl $t$ der Jahre seit Beobachtungsbeginn	0	1	5	10	20	40
Anzahl $w(t)$ der geschlechtsreifen Weibchen	300	297	288	280	270	254

Untersuchen Sie, ob diese Entwicklung näherungsweise durch eine Funktion  $w$  mit  $w(t) = a \cdot e^{kt}$  beschrieben werden kann. **(15P)**

*Hinweis: Benutzen Sie für das Aufstellen der Funktion die Wertepaare (0/300) und (20/270).*

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

- c) Bestätigen Sie, dass es unter den durch die Matrix  $M$  beschriebenen Umweltbedingungen keinen Bestand geben kann, der sich reproduziert. **(10P)**

- d) Ein Hobbybiologe überlegt, ob man u.U. durch Bewachung und Schutz der frisch geschlüpften Schildkröten Populationen stabilisieren kann.
- Bestimmen Sie das entsprechende Matrixelement so, dass es für die neue Matrix  $M_2$  Fixvektoren gibt, und geben Sie einen Fixvektor an.

Die Frau des Hobbybiologen gibt zu bedenken, dass dies wiederum einen Eingriff in das Ökosystem und den Nahrungskreislauf bedeutet, dessen Folgen für die übrige Fauna nicht abzusehen wären. Vielmehr müsse der Umweltschutz so verbessert werden, dass die Überlebensrate der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Weibchen steigt.

- Gehen Sie im Modell davon aus, dass sich unter verbesserten Umweltbedingungen die Überlebensrate der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Weibchen mit demselben Faktor  $r$  erhöht. Bestimmen Sie  $r$  so, dass eine Stabilisierung des Bestandes eintritt. (Zur Kontrolle: Man erhält als Zwischenergebnisse  $r \approx 1,0033$  und  $r \approx 1,1788$ )  
Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix  $M_3$  und einen zugehörigen Fixvektor. **(20P)**

Zurück zu der anfangs durch  $M$  beschriebenen Entwicklung des Bestandes.

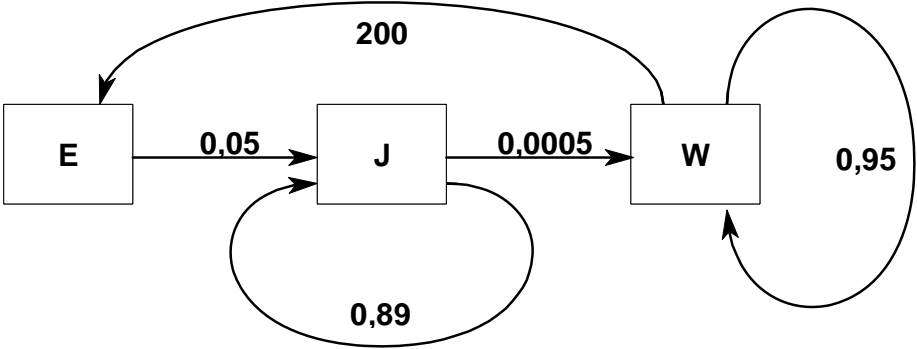
Durch das obige Modell wird nicht der gesamte Bestand an Schildkröten erfasst. Schildkröten können über 100 Jahre alt werden, fortpflanzungsfähig sind sie jedoch nur ca. 20 Jahre. Für Touristen sind große, alte Schildkröten in freier Natur ein seltener, sensationeller Anblick. Es werden nun neben Eiern ( $E$ ) und Jungschildkröten ( $J$ ) fortpflanzungsfähige männliche und weibliche Schildkröten ( $G$ ) und alte, nicht mehr fortpflanzungsfähige Schildkröten beiderlei Geschlechts ( $A$ ) betrachtet.

- e) Begründen Sie, welche Elemente der Populationsmatrix  $P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & p & t & u \end{pmatrix}$

gleich Null sind und welche von Null verschieden sein müssen, um die Entwicklung dieser Population beschreiben zu können. **(15P)**

- f) Leiten Sie auf der Grundlage von  $M$  eine  $4 \times 4$  –Matrix  $M_4$  her, in der nun auch die Entwicklung der fortpflanzungsfähigen männlichen Schildkröten und der nicht mehr fortpflanzungsfähigen alten – männlichen und weiblichen – Schildkröten erfasst sind.  
Gehen Sie bei der Modellierung davon aus, dass
- es gleich viele männliche wie weibliche Schildkröten in dieser Population gibt,
  - die Überlebensraten für beide Geschlechter gleich sind.
- Begründen Sie, ob – und wenn ja, wie – sich die von Null verschiedenen Matrixelemente von  $M$  beim Übergang auf  $M_4$  verändern.
  - Begründen Sie, welche mathematisch sinnvollen Überlebensraten für den Bestand an alten Schildkröten in Frage kommen. **(20P)**

**Erwartungshorizont**

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><u>Übergangsgraph:</u></p>  <p>Folgende Annahmen liegen dem Modell in jedem Zeittakt (ein Jahr) zu Grunde:          Jede geschlechtsreife weibliche Schildkröte legt 200 Eier.          Nur noch 5 % der ursprünglich aus den Eiern geschlüpften kleinen Schildkröten sind am Leben.          89 % der Jungschildkröten verbleiben innerhalb ihrer Altersklasse.          0,5 Promille der Jungschildkröten wachsen zu geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten heran.          Die Überlebensrate der geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten beträgt 95 %.</p>	15	5	
b)	<p>Es gilt: <math>w(0) = a \cdot e^0 = 300</math> und damit <math>a = 300</math>.</p> <p>Aus <math>w(20) = 300 \cdot e^{20k} = 270</math> folgt:</p> $e^{20k} = \frac{270}{300} \Leftrightarrow k = 0,05 \ln 0,9 \Rightarrow k \approx -0,0053$ <p>Die Funktionsgleichung lautet somit: <math>w(t) = 300 \cdot e^{0,05 \ln 0,9 \cdot t}</math> bzw.  <math>w(t) \approx 300 \cdot e^{-0,0053 \cdot t}</math></p> <p>Prüfung:  <math>w(1) \approx 298</math>, <math>w(5) \approx 292</math>, <math>w(10) \approx 284</math>, <math>w(40) = 243</math>.</p> <p>Die mit der Funktionsgleichung ermittelten Anzahlen geschlechtsreifer Weibchen stimmen also näherungsweise mit den Werten in der Tabelle überein.          Die größte prozentuale Abweichung ist kleiner als 5 %.</p>		15	
c)	<p>Das Gleichungssystem, das sich aus dem Ansatz <math>M \cdot \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix}</math> ergibt, hat nur die Lösung <math>E = J = W = 0</math>.</p> <p>Also gibt es keinen Bestand, der sich reproduziert.</p>	10		

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>• Gesucht ist <math>x</math>, so dass zu <math>M_2 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 200 \\ x &amp; 0,89 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0,0005 &amp; 0,95 \end{pmatrix}</math> ein Fixvektor <math>\vec{p}</math> existiert.</p> <p>Aus dem Ansatz <math>M_2 \cdot \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix}</math> erhält man <math>x = 0.055</math> und damit</p> <p><math>M_2 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 200 \\ 0,055 &amp; 0,89 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0,0005 &amp; 0,95 \end{pmatrix}</math>. Ein Fixvektor ist <math>\begin{pmatrix} 60000 \\ 30000 \\ 300 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>• Gesucht ist <math>r</math>, so dass zu <math>M_3 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 200 \\ 0,05 &amp; 0,89r &amp; 0 \\ 0 &amp; 0,0005r &amp; 0,95r \end{pmatrix}</math> ein Fixvektor <math>\vec{p}</math> existiert.</p> <p>Der Ansatz <math>M_3 \cdot \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix}</math> führt auf die quadratische Gleichung</p> <p><math>-0,08455r^2 + 0,1845r = 0,1</math>  <math>\Rightarrow r \approx 1,0033 \vee r \approx 1,1788</math></p> <p>Die zweite Lösung ist im Sachkontext unsinnig, da <math>0,89 \cdot 1,1788 &gt; 1</math>.                  Die erste Lösung ergibt die Matrix</p> <p><math>M_3 \approx \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 200 \\ 0,05 &amp; 0,8929 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0,0005 &amp; 0,9529 \end{pmatrix}</math>.</p> <p><math>\vec{p} \approx \begin{pmatrix} 60000 \\ 28000 \\ 300 \end{pmatrix}</math>.</p>	5	5	10
e)	<p>Da sich nur geschlechtsreife Schildkröten fortpflanzen, gilt: <math>a=b=d=0, c \neq 0</math>.                  Jungschildkröten entwickeln sich aus den Eiern oder verbleiben in der „Altersstufe“ (<math>J</math>). Hieraus folgt: <math>g=h=0, e \neq 0, f \neq 0</math>.</p> <p>Geschlechtsreife Schildkröten entwickeln sich aus den Jungschildkröten oder verbleiben in der „Altersstufe“ (<math>G</math>). Hieraus folgt: <math>j=m=0, k \neq 0, l \neq 0</math>.</p> <p>Aus analogen Überlegungen zu den alten Schildkröten folgt:  <math>n=p=0, t \neq 0, u \neq 0</math>.</p>		10	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>Zu beachten ist, dass man die Anzahl der Eier halbieren muss, wenn im Bestand Schildkröten beiderlei Geschlechts erfasst wurden. Die übrigen von Null verschiedenen Matrixelemente verändern sich durch die Berücksichtigung der männlichen Schildkröten nicht.</p> <p>Eine mögliche Lösung ist</p> $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0,05 & 0,89 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0005 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0,96 \end{pmatrix}.$ <p>Das Matrixelement 0,95 besagt, dass 95 % der geschlechtsreifen Schildkröten in dieser Klasse verbleiben. Die übrigen 5 % sind aus dieser Klasse herausgewachsen, sind also gealtert, oder haben das Jahr nicht überlebt. Mithin muss dies beim Vergrößern des Bestandes A berücksichtigt werden.</p> <p>Bei der Festsetzung der Überlebenswahrscheinlichkeit der alten Schildkröten muss berücksichtigt werden, dass jede solche Schildkröte bereits ein Alter von mindestens 45 Jahren erreicht hat und einige noch weit mehr als 55 Jahre Lebenserwartung haben müssen. Ob nun die jährlich Überlebenswahrscheinlichkeit unter oder über der „Verbleiberate“ von <math>G</math> von 0,95 festgesetzt wird, hängt davon ab, ob man den „Alten“ höhere Sterbewahrscheinlichkeiten z.B. aus „Altersschwäche“ zuschreibt oder nicht.</p> <p><i>Ähnliche Überlegungen werden von den Schülerinnen und Schülern erwartet.</i></p>			
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25