LA/AG 2

II.2 Erforschung von Schädlingspopulationen

Eine wissenschaftliche Arbeitsgruppe – bestehend aus Mathematikerinnen und Biologen – hat den Auftrag, das Wachstum von Populationen einer bestimmten Schädlingsart zu erforschen. Ein besonderer Schwerpunkt der Arbeit sind Langzeituntersuchungen. Die Mathematikerinnen haben von den Biologen erfahren, dass sich der Schädling recht gut in Entwicklungsklassen unterteilen lässt. Diese Unterteilung wird in einem mathematischen Modell aufgegriffen. Dabei unterteilt man die Gesamtpopulation in *Junge*, *Reife* und *Ausgewachsene*. Deren jeweilige Anzahlen j_n, r_n bzw. a_n werden zu einem Zeitpunkt *n* in einem Populationsvektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} j_n \\ r_n \\ a_n \end{pmatrix}$ notiert. Durch die allgemeine Modellgleichung $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n$ wird der Übergang vom Zeitpunkt *n* zum Zeitpunkt *n* + 1 beschrieben.

L ist dabei eine Übergangsmatrix. Ein Zeitschritt hat die Länge von einem Monat. Vereinfachend werden im Folgenden ausschließlich weibliche Individuen betrachtet.

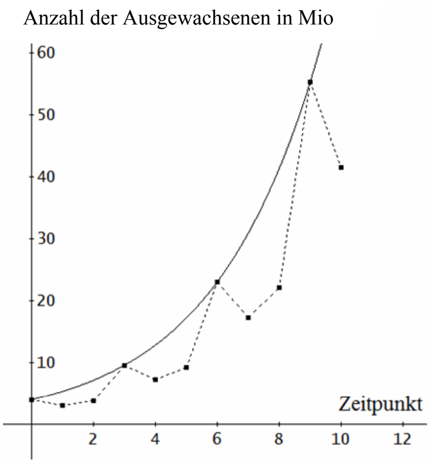
In einem ersten Versuch der Modellierung wird die Übergangsmatrix $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$ verwendet.

a) Erstellen Sie einen Übergangsgraphen entsprechend dem oben genannten Modell und den Werten aus der Matrix *K*. **(5P)**

b) Berechnet man ausgehend von einem Startvektor $\vec{v}_0$ bestehend aus 8 Millionen *Jungen*, 5 Millionen *Reifen* und 4 Millionen *Ausgewachsenen* unter Verwendung der Matrix *K* die Entwicklung der Population für einige Zeitschritte, so ergibt sich für die Teilpopulation der *Ausgewachsenen* die folgende unvollständige Wertetabelle, die auch grafisch in dem Koordinatensystem dargestellt ist:

- Berechnen Sie den fehlenden Wert a_2 mithilfe der Übergangsmatrix *K*.
- Trotz der Schwankungen in der Entwicklung liegen die jeweiligen *lokalen Hochpunkte* auf dem Graphen einer Exponentialfunktion mit der Gleichung $g(n) = c \cdot \boldsymbol{e}^{b \cdot n}$. Ermitteln Sie mithilfe der Wertetabelle die beiden Parameter *c* und *b*.

Zeitpunkt *n*	Anzahl der Ausge-wach-senen a_n
0	4 000 000
1	3 000 000
2	
3	9 600 000
4	7 200 000
5	9 216 000
6	23 040 000
7	17 280 000
8	22 118 400
9	55 296 000
10	41 472 000



(25P)

Die Biologen wenden ein, dass die bisherigen Modellrechnungen zu weit von den realen Gegebenheiten entfernt seien. In einem zweiten Modellierungsversuch wird deshalb unter anderem berücksichtigt, dass ein Teil der *Reifen* den Entwicklungsschritt in die nächste Klasse nicht vollzieht. Jetzt wird die folgende Übergangsmatrix M zugrunde gelegt:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie vor dem Hintergrund des Sachkontextes die Bedeutung der Matrixeinträge $m_{12} = 2$ und $m_{33} = 0{,}1$ an. **(10P)**

d) Um die Qualität des veränderten Modells zu überprüfen, soll unter Verwendung der Matrix M aus den beobachteten Daten zum Zeitpunkt $n = 0$ ($j_0 = 8 \cdot 10^6$, $r_0 = 5 \cdot 10^6$, $a_0 = 4 \cdot 10^6$) zum Populationsvektor des unmittelbar vorangegangenen Zeitpunkts zurückgerechnet werden**.**

- Bestimmen Sie unter Zugrundelegung des genannten Modells den Populationsvektor zum vorangegangenen Zeitpunkt $n = -1$.
- Die Biologen stellten zum Zeitpunkt $n = -1$ einen *tatsächlichen* Bestand von ca. 8,35 Millionen *Jungen* sowie 4,02 Millionen *Reifen* und 32,20 Millionen *Ausgewachsenen* fest. Berechnen Sie für Ihre drei oben *mathematisch ermittelten* Daten die jeweilige prozentuale Abweichung vom *tatsächlichen* Wert. Geben Sie auf dieser Grundlage an, welche Qualität das Modell Ihrer Meinung nach hat. **(20P)**

Falls sich eine Populationszusammensetzung im Verlaufe der Zeit nicht mehr ändert, hat sie einen *stationären Zustand* $\vec{s}$ erreicht.

e) Aus biologischer Sicht kann es sinnvoll sein, eine Schädlingspopulation nicht auszurotten, sondern so zu kontrollieren, dass sich ein vom Nullvektor verschiedener stationärer Zustand einstellt.
Durch den Einsatz von Chemikalien ist es möglich, die Übergangsrate der *Jungen* zu den *Reifen* zu senken. Die Biologen in der Arbeitsgruppe wünschen sich dazu von den Mathematikerinnen einen Vorschlag.
Die veränderte Matrix wird $\overline{M}$ genannt; sie unterscheidet sich von der Matrix M lediglich in der erwähnten Übergangsrate.
Ermitteln Sie den Wert, den diese Übergangsrate annehmen muss, damit es zur Matrix $\overline{M}$ im Rahmen des oben genannten Modells einen stationären Zustand gibt. **(20P)**

Eine andere Möglichkeit, einen stationären Zustand zu erhalten, besteht in der Senkung des Anteils derjenigen *Reifen*, die nach Ablauf eines Zeitschritts in dieser Entwicklungsklasse verbleiben. Durch die Behandlung der Schädlinge mit einem bestimmten Hormon lässt sich dieser Anteil von 20 % auf 0 % senken. Die so entstehende Übergangsmatrix hat dann die folgende Gestalt:

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\widehat{M}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0{,}1$ sowie $\lambda_3 = -1$ mit den drei dazugehörigen möglichen Eigenvektoren $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 22 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$.

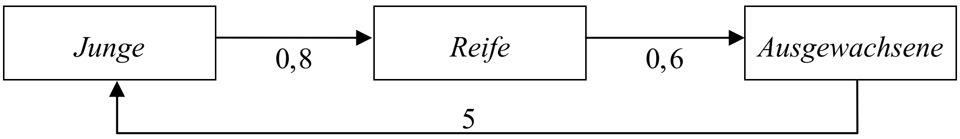
Hinweis: Ist λ ein Eigenwert einer Matrix A und $\vec{w}$ der dazugehörige Eigenvektor, so gilt $A \cdot \vec{w} = \lambda \cdot \vec{w}$.

Im Rahmen einer Untersuchung, ob mithilfe der Matrix $\widehat{M}$ die Realität angemessen beschrieben werden kann, wird im Folgenden das Modellverhalten für verschiedene Startvektoren betrachtet.

f)
- Begründen Sie, warum der Eigenvektor $\vec{w}_1$ einen stationären Zustand darstellt.
- Betrachten Sie einen Startvektor $\vec{b}_0$, der sich durch $\vec{b}_0 = 2 \cdot \vec{w}_1 + 2000 \cdot \vec{w}_2$ als Linearkombination der Eigenvektoren $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ darstellen lässt.

  Begründen Sie, etwa unter Zuhilfenahme des Zusammenhangs $\vec{b}_n = \widehat{M}^n \cdot \vec{b}_0$, warum die so beschriebene Populationsentwicklung sich mit wachsendem Wert für *n* immer mehr einem bestimmten Vektor annähert und ermitteln Sie diesen.
- Beurteilen Sie, wie sich die Modellpopulation entwickelt, wenn man einen Startvektor verwendet, der sich als Linearkombination von $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_3$ darstellen lässt ($\vec{w}_2$ wird hier zur Darstellung nicht benötigt). **(20P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	 	5		
b)	• $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8\cdot 10^6 \\ 5\cdot 10^6 \\ 4\cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 10^7 \\ 6{,}4\cdot 10^6 \\ 3\cdot 10^6 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot 10^7 \\ 6{,}4\cdot 10^6 \\ 3\cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5\cdot 10^7 \\ 1{,}6\cdot 10^7 \\ 3{,}84\cdot 10^6 \end{pmatrix}$ also $a_2 = 3{,}84\cdot 10^6$. • Zeitpunkte von lokalen Hochpunkten sind etwa 0 und 3. Also ist anzusetzen: (I) $g(0) = c\cdot \boldsymbol{e}^{b\cdot 0} = 4\cdot 10^6$ (II) $g(3) = c\cdot \boldsymbol{e}^{b\cdot 3} = 9{,}6\cdot 10^6$ Aus (I) folgt $c = 4\cdot 10^6$. Eingesetzt in (II) ergibt sich: $4\cdot 10^6 \cdot \boldsymbol{e}^{b\cdot 3} = 9{,}6\cdot 10^6 \Leftrightarrow \boldsymbol{e}^{b\cdot 3} = 2{,}4 \Leftrightarrow 3b = \ln 2{,}4 \Leftrightarrow b = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\ln 2{,}4}}$. Man erhält somit $g(n) = 4\cdot 10^6 \cdot \boldsymbol{e}^{\frac{1}{3}\cdot\ln(2,4)\cdot n}$ *Der Exponent von e kann auch gerundet angegeben werden.*	5	20	
c)	m_{12} gibt an, wie viele *Junge* durch jede *Reife* pro Zeitschritt entstehen. m_{33} gibt an, welcher Anteil der *Ausgewachsenen* nach einem Zeitschritt in dieser Entwicklungsklasse verbleibt.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	• Es ist das lineare Gleichungssystem $M \cdot \vec{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 8\cdot 10^6 \\ 5\cdot 10^6 \\ 4\cdot 10^6 \end{pmatrix}$ zu lösen. Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat folgende Gestalt: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 2 & 0 & 8\cdot 10^6 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 5\cdot 10^6 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 4\cdot 10^6 \end{array}\right)$ Addiert man in einem Gauß-Schritt das (–10)-fache der zweiten Zeile zur ersten, so erhält man: $\left(\begin{array}{ccc\|c} -5 & 0 & 0 & -4{,}2\cdot 10^7 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 5\cdot 10^6 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 4\cdot 10^6 \end{array}\right)$ Schrittweise ergibt sich: $-5 j_{-1} = -4{,}2\cdot 10^7 \Leftrightarrow j_{-1} = \underline{\underline{8{,}4\cdot 10^6}}$ $0{,}5\cdot 8{,}4\cdot 10^6 + 0{,}2\cdot r_{-1} = 5\cdot 10^6 \Leftrightarrow r_{-1} = \underline{\underline{4\cdot 10^6}}$ $0{,}2\cdot 4\cdot 10^6 + 0{,}1\cdot a_{-1} = 4\cdot 10^6 \Leftrightarrow a_{-1} = \underline{\underline{3{,}2\cdot 10^7}}$ woraus man $\vec{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 8{,}4\cdot 10^6 \\ 4\cdot 10^6 \\ 3{,}2\cdot 10^7 \end{pmatrix}$ erhält. • *Junge*: $\left\| \frac{8{,}35 - 8{,}4}{8{,}35} \cdot 100\% \right\| \approx 0{,}6\%$ *Reife*: $\left\| \frac{4{,}02 - 4}{4{,}02} \cdot 100\% \right\| \approx 0{,}5\%$ *Ausgewachsene*: $\left\| \frac{32{,}20 - 32}{32{,}20} \cdot 100\% \right\| \approx 0{,}6\%$ Die prozentualen Abweichungen sind sehr gering, die Qualität des Modells ist an dieser Stelle demnach eher hoch. *Anmerkung: Es kommt bei der Qualitätseinschätzung darauf an, die bestehenden Abweichungen als generelle Begleiterscheinung von Modellierung zu erkennen. Eine Antwort, die aus der Existenz der Abweichungen schließt, das Modell sei von geringer Qualität, ist demnach als falsch zu bewerten.*	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Sei k die Übergangsrate der *Jungen* zu den *Reifen.* Dann gilt $\overline{M}=\begin{pmatrix}0&2&0\\k&0{,}2&0\\0&0{,}2&0{,}1\end{pmatrix}$ und man setzt an $\begin{pmatrix}0&2&0\\k&0{,}2&0\\0&0{,}2&0{,}1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ mit $\vec{s}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ Die Matrixgleichung zerfällt in drei Einzelgleichungen: $I.\quad 2y=x$ $II.\quad k\cdot x+0{,}2y=y$ $III.\quad 0{,}2y+0{,}1z=z$ Die Gleichungen *I* und *II* sind wesentlich zur Bestimmung von k. Setzt man *I* in *II* ein, ergibt sich: $k\cdot 2y+0{,}2y=y \Leftrightarrow k\cdot 2y=0{,}8y \Leftrightarrow k\cdot y=0{,}4y$ Fallunterscheidung: o $y\neq 0$: Es folgt direkt $k = 0{,}4$. o $y=0$: Aus $y = 0$ folgt wegen *I* auch $x = 0$ und wegen *III* folgt $z = 0$. Dies ist nach Aufgabenstellung nicht zulässig, da vom Nullvektor *verschiedene* stationäre Vektoren gesucht werden. Die anzustrebende Übergangsrate der *Jungen* zu den *Reifen* hat also den Wert 0,4. *Alternativer Lösungsweg*: Sei k die Übergangsrate der *Jungen* zu den *Reifen.* Dann gilt: $\overline{M}=\begin{pmatrix}0&2&0\\k&0{,}2&0\\0&0{,}2&0{,}1\end{pmatrix}$ und es ist anzusetzen $\begin{pmatrix}0&2&0\\k&0{,}2&0\\0&0{,}2&0{,}1\end{pmatrix}\cdot\vec{s}=\vec{s}$ Dieser Ansatz führt zu folgender erweiterter Koeffizientenmatrix: $\left(\begin{array}{ccc\|c}0-1&2&0&0\\k&0{,}2-1&0&0\\0&0{,}2&0{,}1-1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc\|c}-1&2&0&0\\k&-0{,}8&0&0\\0&0{,}2&-0{,}9&0\end{array}\right)$ Mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens erhält man: $\left(\begin{array}{ccc\|c}-0{,}9&0{,}2&0&0\\0&-0{,}8&k&0\\0&0&-1+2{,}5k&0\end{array}\right)$ Genau dann gibt es vom Nullvektor verschiedene Lösungen (die allesamt stationäre Zustände darstellen) wenn $-1+2{,}5k=0$. Diese Gleichung ist für $k = 0{,}4$ erfüllt. Die anzustrebende Übergangsrate der *Jungen* zu den *Reifen* hat also den Wert 0,4.		15	5

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>

• Der Eigenvektor $\vec{w}_1$ gehört zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.
Mithin gilt $A \cdot \vec{w}_1 = 1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{w}_1$. Die Multiplikation mit A ändert also $\vec{w}_1$ nicht, damit bildet $\vec{w}_1$ definitionsgemäß einen stationären Zustand.

Anmerkung: Auch andere Argumentationen, etwa ein direktes Nachrechnen, sind möglich.

• Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{b}_n &= \widehat{M}^n \cdot \vec{b}_0\\ &= \widehat{M}^n (2 \cdot \vec{w}_1 + 2000 \cdot \vec{w}_2)\\ &= 2 \cdot \widehat{M}^n \vec{w}_1 + 2000 \cdot \widehat{M}^n \cdot \vec{w}_2\\ &= 2 \cdot 1^n \vec{w}_1 + 2000 \cdot 0{,}1^n \cdot \vec{w}_2 \quad \text{(weil 1 und 0,1 die EW zu } \vec{w}_1 \text{ bzw. } \vec{w}_2 \text{ sind)}\\ &= 2 \cdot \vec{w}_1 + 2000 \cdot 0{,}1^n \cdot \vec{w}_2\end{aligned}$$

Da $0{,}1^n$ für wachsendes n gegen Null strebt, ist der zweite Summand langfristig zu vernachlässigen. Die Entwicklung strebt also insgesamt gegen den ersten Summanden. Damit nähern sich die Populationsvektoren mit wachsendem Wert für n immer stärker dem Vektor $2\vec{w}_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix}18\\9\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}36\\18\\4\end{pmatrix}$ an.

Anmerkung: Auch eine weniger formale Argumentation soll – wenn sie vollständig dargelegt wird – als korrekt bewertet werden.

• Sei also $\vec{b}_0 = \mu_1 \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot \vec{w}_3$, wobei nach Aufgabenstellung beide Koeffizienten von Null verschieden sind. Mit einer Umformung analog zur oben durchgeführten gilt

$$\begin{aligned}\vec{b}_n &= \mu_1 \cdot \lambda_1^n \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot \lambda_3^n \cdot \vec{w}_3\\ &= \mu_1 \cdot 1^n \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot (-1)^n \cdot \vec{w}_3\\ &= \mu_1 \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot (-1)^n \cdot \vec{w}_3\end{aligned}$$

Der erste Summand ist unabhängig vom Wert von n konstant (s.o.).
Der zweite Summand stellt einen bis auf das Vorzeichen konstanten Vektor dar; das Vorzeichen wechselt mit jedem Zeitschritt.
Die Entwicklung der Populationsvektoren $\vec{b}_n$ bildet also einen Zyklus mit der Periodenlänge 2, wobei die beiden Zustände der Periode durch $\mu_1 \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot \vec{w}_3$ bzw. $\mu_1 \cdot \vec{w}_1 - \mu_3 \cdot \vec{w}_3$ gegeben sind.

</td><td></td><td>5</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>