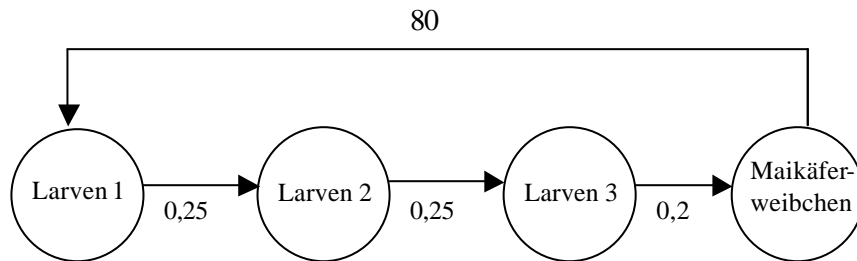


Name:

Datum:

## Übergangsprozesse - Maikäferpopulation - Aufgabe mit Lösung

Ein Maikäferweibchen legt 80 Eier und stirbt bald danach. Von den sich daraus entwickelnden Larven (Engerlinge) überleben nur ein Viertel das darauffolgende Jahr. Auch im zweiten Jahr überleben nur ein Viertel der Larven. Im dritten Jahre verpuppen sich die Larven und aus einem Fünftel von ihnen entwickeln sich im folgenden Jahr Maikäferweibchen, die wieder 80 Eier legen.



Die Startpopulation besteht aus 6000 Larven 1, 2000 Larven 2, 300 Larven 3 und 500 Käferweibchen.

### **Arbeitsaufträge:**

*Untersuchen Sie die Entwicklung dieser Startpopulation.*

## Lösung:

Zustandsvektor der Startpopulation:

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} l_1(0) \\ l_2(0) \\ l_3(0) \\ k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 2000 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Für die Verteilung nach einem Jahr ergibt sich:

$$\begin{aligned} l_1(1) &= 80 \cdot k(0) \\ l_2(1) &= 0,25 \cdot l_1(0) \\ l_3(1) &= 0,25 \cdot l_2(0) \\ k(1) &= 0,2 \cdot l_3(0) \end{aligned}$$

LGS in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} l_1(1) \\ l_2(1) \\ l_3(1) \\ k(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1(0) \\ l_2(0) \\ l_3(0) \\ k(0) \end{pmatrix}$$

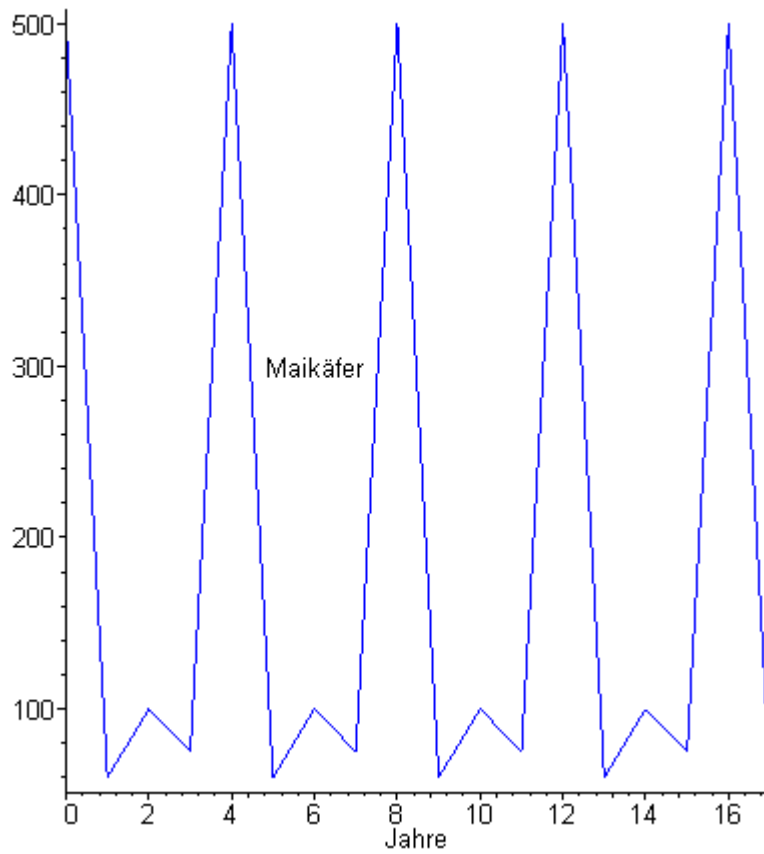
$$\vec{p}_1 = U \cdot \vec{p}_0 \quad \text{mit der Übergangsmatrix } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ausgehend vom Startvektor  $\vec{p}_0$  können wir damit nun die Populationen für die folgenden Jahre berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= U \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 40000 \\ 1500 \\ 500 \\ 60 \end{pmatrix} & \vec{p}_2 &= U \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 4800 \\ 10000 \\ 375 \\ 100 \end{pmatrix} \\ \vec{p}_3 &= U \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 8000 \\ 1200 \\ 2500 \\ 75 \end{pmatrix} & \vec{p}_4 &= U \cdot \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 6000 \\ 2000 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \vec{p}_0 \end{aligned}$$

In einem Zyklus von 4 Jahren stellt sich also wieder die Ausgangspopulation ein.

Entwicklung des Maikäferbestandes



Solche vierjährigen Zyklen werden bei Maikäferpopulationen in der Natur beobachtet.