Lösungen

Linearisierbare Prozesse

1. Preiserhöhung

a) Der Preis für Diesel ist um 4,71 % gestiegen.

b) $d = \frac{50}{0,849} - \frac{50}{0,889}$: Man bekommt 2,65 l weniger.

c) Man bekommt noch 95,5% der Menge vor der Preiserhöhung.
Also: Die Preiserhöhung um 4,71 % entspricht einer Mengenreduktion um 4,50%.

d) Man muss 2,24 € mehr zahlen.

2. Heizöl

Als Funktionen formuliert lauten die Angebote
$A(m) = 40 + 0,395m$ und $B(m) = 60 + 0,375m$.

a) Bei einer Abnahmemenge von 1000 l herrscht Preis-Gleichstand.

b) Nach dem Ergebnis in a) ist das Angebot B günstiger.

c) Er muss dabei 1372,50 € zahlen.

d) Das Angebot A würde ihn 50 € mehr kosten.
Bei Angebot B zahlt er letztlich 0,392 € / l.

3. Taschengeld

a) Im Monat erhält Mimi (mindestens) viermal Taschengeld, also (mindestens) 8 €. Sie gibt einmal pro Monat 4,50 € aus, behält also im Monat (mindestens) 3,50 € übrig.

b) Unter der Annahme von vier Mittwoch-Tagen im Monat wächst Mimis „Vermögen“ im Mittel um 3,50 € pro Monat.
Geht man von 52 Taschengeld-Zahlungen im Jahr aus, aber weiterhin nur von 12 Zeitschriften, so nimmt Mimis „Vermögen“ sogar im Mittel um 4,17 € pro Monat zu; bei 13 Zeitschriften im Jahr um 3,79 € pro Monat.

c) Da die Aufgabe nicht genau spezifiziert, wann im Jahr zum ersten Mal eine Zeitschrift gekauft wird, ist dieses Datum nicht sicher anzugeben. Unter der Annahme, dass die erste Zeitschrift am Montag, den 7. Januar, gekauft wird, erhält man den Mittwoch, der 23 Wochen nach dem 2. Januar liegt – also den 13. Juni - , als den Tag, an dem der Kontostand mit 31 € erstmalig über dreißig Euro liegt..

d) Zwei Wochen später wird dann die Zone unter 30 € endgültig verlassen.

4. Ferienwohnung

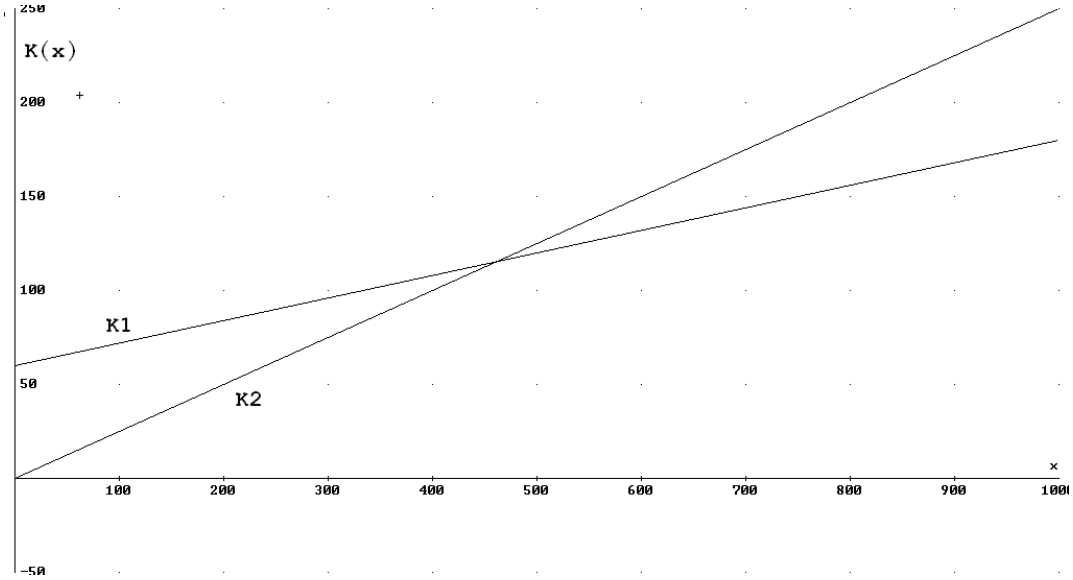
a) Familie Müller muss 1282,50 € zahlen.

b) Die Wohnung kostet 1147,50 €.

5. Bahntarife

a) Kosten mit Bahnkarte K_1: K_1 = 60 € + 700 · 0,12 € = 144 €.
Kosten ohne Bahnkarte K_2 : K_2 = 700 · 0,25 € = 175 €.

b) x: Anzahl der gefahrenen Kilometer, K: Fahrpreis in €.
$K_1(x) = 60 + 0,12x$
$K_2(x) = 0,25x$



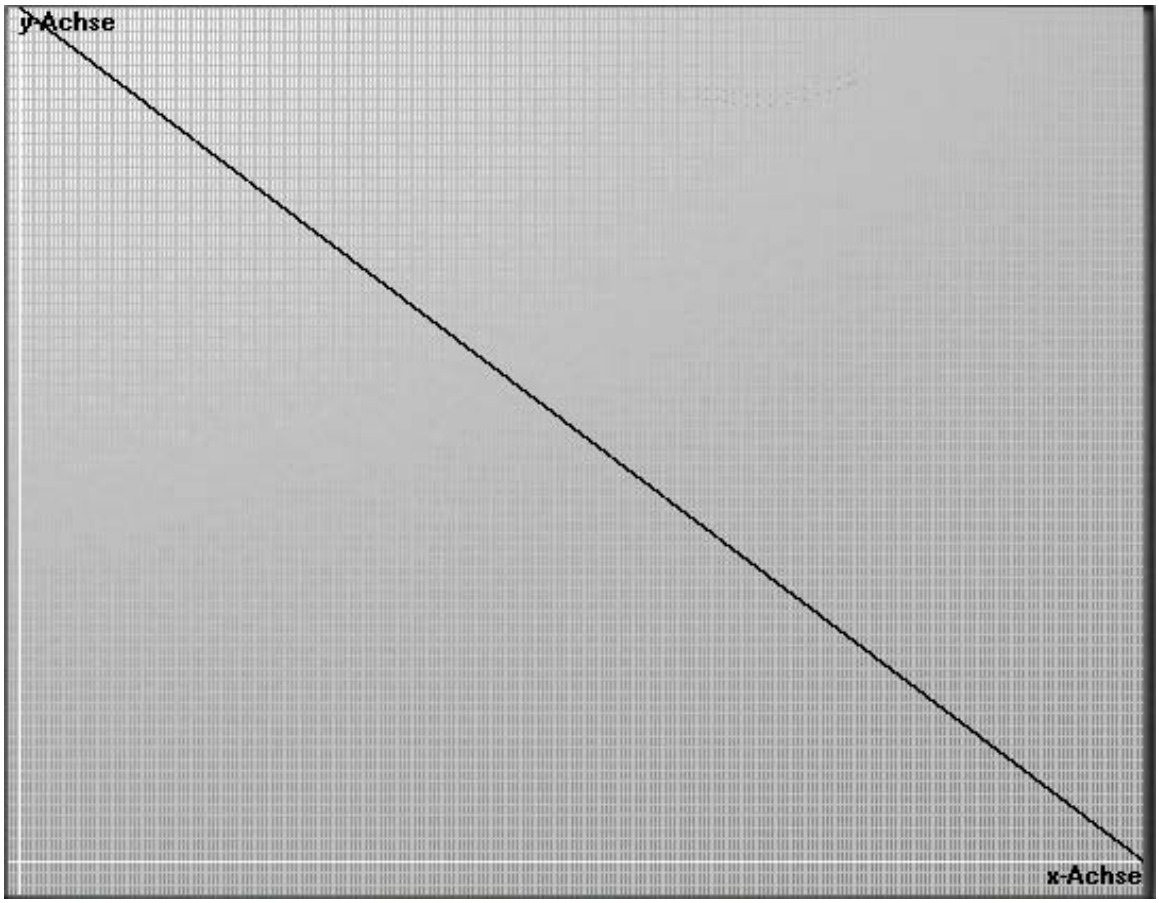
c) $K_1(x) = K_2(x) \Leftrightarrow 60 + 0{,}12x = 0{,}25x \Leftrightarrow x = 461{,}54$
Fährt man mehr als 461,54 km im halben Jahr, so lohnt sich die Anschaffung einer Bahngrundkarte.
(Das Ablesen im Koordinatensystem ist ebenfalls möglich.)

6. Auto

a) Für den ersten Teil der Strecke braucht das Auto 6 Minuten, für den zweiten 8 Minuten, also insgesamt 14 Minuten.
b) Gemeint ist hier die jeweilige Durchschnittsgeschwindigkeit . – Nach insgesamt neun Minuten Fahrt befindet sich das Auto seit drei Minuten im zweiten Teil der Strecke, hat also bei der dortigen Durchschnittsgeschwindigkeit 4,5 km zurückgelegt. Die Entfernung von A beträgt damit 9,5 km.
c) Um von den acht Minuten auf dem zweiten Abschnitt eine Minute zu sparen, muss das Auto mit knapp 103 km/h fahren.

7. Sanduhr

a) $f(t) = 75 - 0{,}25t$



b) Wenn sich der gesamte Sand in der unteren Hälfte befindet, ist die obere Hälfte leer

$0 = 75 - 0{,}25t$
$t = 75:0{,}25 = 300$
Nach 300 Sekunden (5 min) befindet sich der gesamte Sand in der unteren Hälfte.
c)
$20 = 75 - 0{,}25t$
$t = 55:0{,}25 = 220$
Nach 220 Sekunden (3 min 40 s) befinden sich im oberen Teil der Sanduhr noch 20 mm^3 Sand.
d) Sechs Minuten entsprechen 360 Sekunden. Nach 360 Sekunden soll die Sanduhr bei gleicher Laufgeschwindigkeit leer sein. Sind Sandmenge wird mit S bezeichnet.

$0 = S - 0{,}25 \cdot 360$

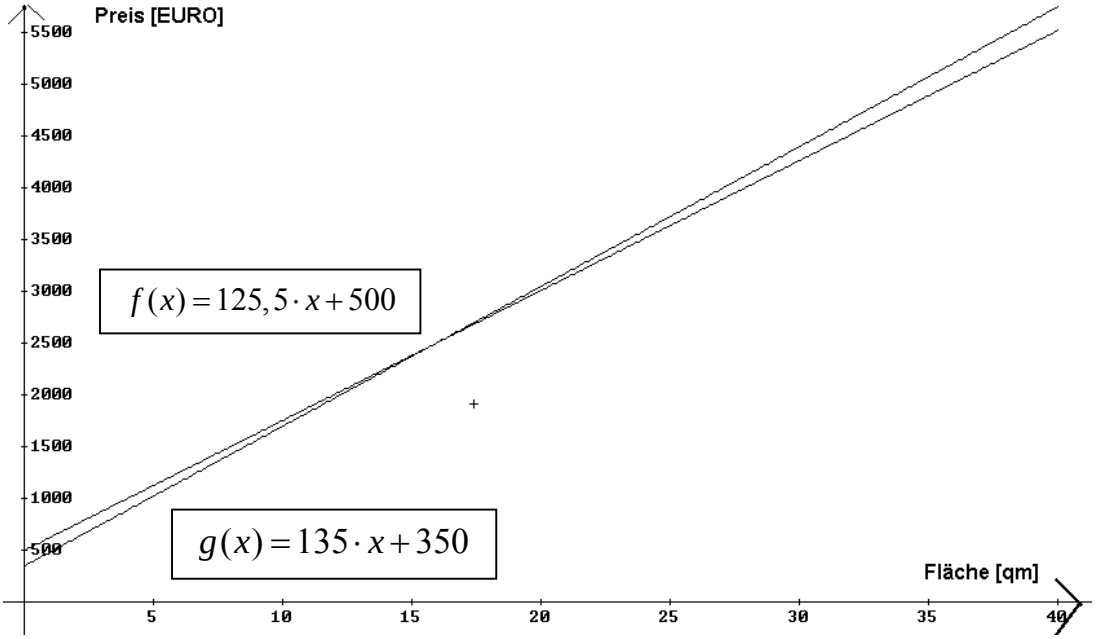
$S = 0{,}25 \cdot 360 = 90$
Es müssten 90 mm^3 Sand in der Sanduhr vorhanden sein.
e) t = 360 s; die Durchlassmenge wird mit d bezeichnet
$0 = 75 - 360d$

$d = 75:360 = \frac{5}{24} \approx 0{,}2083$
Die Öffnung müsste ungefähr 0,2083 mm^3 Sand pro Sekunde hindurch lassen.
Alternativ zu d) und e):
Man müsste entweder die Öffnung verkleinern, damit der Sand langsamer läuft, oder man müsste die Sandmenge erhöhen. S bezeichnet die Sandmenge, d die Durchlassmenge.

$0 = S - 0{,}25 \cdot 360$
$0 = 75 - 360d$

8. Fliesenarbeiten

a)



Für ca. 16 Quadratmeter sind beide Angebote preislich gleich. Für geringere Flächen ist die Firma "Gründlich" günstiger, für größere die Firma "Fixfliese"

b) $f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow 125,5 \cdot x + 500 = 135 \cdot x + 350$

$\Leftrightarrow 9,5 \cdot x = 150$

$\Leftrightarrow x = \frac{300}{19}$

$\Rightarrow x \approx 15,8$

Ab 15,8 qm Fliesenfläche ist die Firma "Fixfliese" günstiger.

c) $f(\frac{300}{19}) = g(\frac{300}{19}) = 2481,58$

15,8 qm Fliesenfläche liefern beide Firmen zum gleichen Preis von 2481,58 EUR .

d) Wir lösen die Gleichung $f(200) = 100 \cdot x + g$ nach g auf:

$125 \cdot 200 + 500 = 100 \cdot 200 + g$

$\Leftrightarrow g = 5600$

Die Firma "Industrie-Fliese" kalkuliert also einen sehr hohen Grundpreis von 5600 EUR, die Werbung ist irreführend.

9. Jugendherberge

Das Problem wird durch die beiden Gleichungen $145 = 3 \cdot x + 5 \cdot y$ und $35 = x + y$ beschrieben.

I	x + y = 35
∧ II	3x + 5y = 145
I'	y = 35 – x
I' in II	3x + 175 – 5x = 145
	x = 15
	y = 20

Es gibt 15 Dreibett- und 20 Fünfbettzimmer.

10. Rechteck aus Draht

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x + 2y = 64 \\ \wedge\ \text{II} & y = 4x \\ \hline \text{II in I} & 2x + 8x = 64 \\ & x = 6{,}4 \\ \text{II} & y = 25{,}6 \end{array}$$

Die Rechteckseiten müssen jeweils eine Länge von 6,4 cm und 25,6 cm besitzen.

11. Zwei Esel

x: Anzahl der Säcke vom 1. Esel
y: Anzahl der Säcke vom 2. Esel

$$\begin{array}{lll} \text{1. Esel:} & \text{I} & x + 1 = y - 1 \\ \text{2. Esel:} & \wedge\ \text{II} & 2(x - 1) = y + 1 \\ \hline & \text{I' in II} & 2x - 2 = x + 3 \\ & & x = 5 \\ & & y = 7 \end{array}$$

Ein Esel trägt 5, der andere 7 Säcke.
Hinweis: Diese Aufgabe wurde in der diesjährigen Mathematik-Olympiade in der ersten Runde für die 7. Klassenstufe gestellt.

12. Boot im Fluss

$$\begin{array}{ll} \text{I} & v_B + v_{Str} = 4 \\ \wedge\ \text{II} & v_B - v_{Str} = 1{,}5 \\ \hline \text{II'} & v_B = 1{,}5 + v_{Str} \\ \text{II' in I} & 2\,v_{Str} + 1{,}5 = 4 \\ & v_{Str} = 1{,}25 \\ \text{II'} & v_B = 2{,}75 \end{array}$$

Das Boot hat eine Eigengeschwindigkeit von 2,75 m/s; die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt 1,25 m/s.

Geometrie

1. Flächeninhalt

Der Flächeninhalt F des Grundstückes lässt sich zum Beispiel aus dem Flächeninhalt eines großen Rechteckes berechnen, von dem die Flächeninhalte zweier Dreiecke abgezogen werden:

$F = 15 \cdot 30 - 0{,}5 \cdot 5 \cdot 15 - 0{,}5 \cdot 3 \cdot 15 = 390\ (m^2)$

2. Blumenbeet

Die Schülerinnen und Schüler haben bei dieser Aufgabe freie Hand, durch welche Formen, deren Flächeninhalt für sie berechenbar ist, sie sich der Ellipsenfläche annähern. Wahrscheinlich werden sie Rechtecke, Dreiecke und Trapeze wählen.

Eine einfache Lösung würde versuchen, die Polygone so einzuzeichnen, dass sie, nach Augenmaß beurteilt, ungefähr gleich viel überstehen, wie sie abschneiden.

Eine gehobene Lösung würde Polygone ins Innere legen und Polygone um die Ellipse herum, um ein Intervall anzugeben, in dem das Flächenmaß liegen muss. Je nach Zeichnung könnte die Intervallmitte oder ein von der Mitte abweichender Wert als geeigneter Schätzwert gelten.

Als Richtwert für die Lehrkraft diene der theoretische Wert von $25{,}1\text{m}^2$.

3. Die Schere

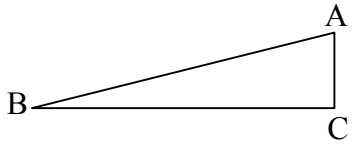
Man zeichne die Schneidkanten, die einen Winkel von 50° bilden. (Der Winkel wird natürlich nicht verfünffacht.) Nun ist ein Kreis zu konstruieren, dessen Durchmesser 60mm beträgt, und der die Schneidkanten berührt.

Da der Kreismittelpunkt von beiden Schneidkanten gleich weit entfernt ist, liegt er auf der Winkelhalbierenden des Öffnungswinkels. Da er von beiden Schneidkanten einen Abstand von 6mm, in der Vergrößerung 30mm hat, liegt er auf den Parallelen zu den Schneidkanten, die diesen Abstand von den Schneidkanten haben und im Inneren der Öffnung verlaufen.

Konstruiert werden kann der Kreismittelpunkt als Schnittpunkt der beiden Schneidkanten-Parallelen oder als Schnittpunkt einer Parallelen mit der Winkelhalbierenden.

4. Aktionskünstler

Die Zeigerspitze bewege sich von B nach A . Auf Grund der gegebenen Angaben kann das rechtwinklige Dreieck ABC, im Maßstab 1:100 mit den Katheten 4cm und 1cm unmittelbar gezeichnet werden.



Die Zeigerspitze beschreibt einen Kreis, dessen Mittelpunkt M von A und B den gleichen Abstand hat. Also liegt M auf der Mittelsenkrechten von der Strecke AB . M ist der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten mit der Gerade AC.
Die Länge der Strecke AM ist der gesuchte Abstande der Zeigerspitze vom Drehpunkt; sie kann aus der Zeichnung ausgemessen und mit dem Maßstabsfaktor multipliziert werden; Ergebnis: 8,50m .

Eine Überprüfung, ob die geplanten Maße genau zum dargestellten Zeitunterschied passen, kann auf verschiedene Weise erfolgen. Eine Möglichkeit wäre Nachmessen des Winkels BMA; dieser beträgt ca. 28°, müsste aber für den Zeitunterschied ein Zwölftel von 360°, also 30° betragen. Eine andere Möglichkeit, den Fehler aufzudecken, wäre eine Zeichnung des vollständigen Kreises, Aufnehmen des Abstands von A und B in den Zirkel und zwölfmaliges Abtragen auf der Kreislinie. Diese Möglichkeit erspart das Rechnen, erfordert aber genaues Zeichnen.

5. Der vergessene Mittelpunkt

Man wähle drei beliebige Punkte A, B und C auf dem Kreis und konstruiere die Mittelsenkrechten zu z.B. $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Der Schnittpunkt dieser beiden Mittelsenkrechten ist der Mit-

telpunkt des Kreises.
Begründung:
Der Kreis ist der Umkreis zum Dreieck ABC, und der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der (drei) Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten.

6. Rechteck

Rechteck: In $A = a \cdot b$ entspricht die Länge a der Mittelparallelen m in der Zeichnung und die Breite b der Höhe h des Rechtecks. Also Ist $A = m \cdot h$.

Dreieck: Da m die Mittelparallele ist, gilt nach dem 2. Strahlensatz: $\frac{m}{g} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} g$.

Also ist $A = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot h$.

Parallelogramm und Trapez: Ist die Formel $A = a \cdot h$ für das Parallelogramm bekannt, folgt mit $a = m$ sofort $A = m \cdot h$.
Andernfalls zerlegt man die Figur diagonal in zwei Teildreiecke und addiert deren Flächenmaßzahlen A_1 und A_2:

$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} c \cdot h$, wobei a und c Grund- und Decklinie sind.

$A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h = m \cdot h$.

7. Winkelspiegel

a) Bezeichnet man den Winkel zwischen einfallendem Strahl und dem Einfallslot (physikal.)mit α und den Winkel zwischen dem dann reflektierten Strahl und dem neuen Einfallslot mit β, ergibt sich:
$\gamma = 180° - 2(\alpha + \beta)$ und $\delta = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = (\alpha + \beta)$.
Damit ist :
$\gamma = 180° - 2\delta$. Es muss gelten $\delta \leq 90°$.

b) Für $\delta = 90°$ verlaufen der einfallende und der ausfallende Strahl parallel zueinander, da in diesem Fall $\gamma = 0°$.

8. Viereck im Koordinatensystem

Bei dem Viereck handelt es sich um ein Trapez, dessen beide parallelen Seiten zur y-Achse parallel sind. Die Parallelen haben Längen von 7 bzw. 11 m, die Höhe des Trapezes (seine Erstreckung in x-Richtung) beträgt 7 m.
Es ergibt sich eine Fläche von 63 m².

9. Mitten in der Landschaft

a) Den Ort der Einmündung findet man als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von A und B mit der Straße.

b) Den Bauplatz für das Hotel findet man als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen Bahn und Straße und dem Verlauf des Flüsschens.

Wahrscheinlichkeit

1. Datenschutz
Die ursprünglich 10 Personen haben ein Gesamtalter von 400 Jahren.
Die danach 11 Personen haben ein Gesamtalter von 11*39 Jahren = 429 Jahre.
Also hat die neu hinzu gekommene Person ein Alter von 29 Jahren.
Der Datenschutz ist also nicht gewahrt, da man dieses Alter erschließen kann.

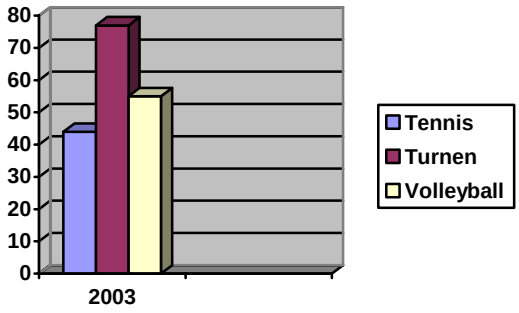
2. Fisch

Fischart:	Dorsch	Scholle	Hering	Makrele	Summe
Winkel des Kreissektors:	108°	72°	144°	36°	360°
Anteil in %:	30	20	40	10	100
zu erwartende Anzahl bei 10000 Stück	3000	2000	4000	1000	10000
zu erwartender Erlös	3000 €	1500 €	400 €	600 €	5500 €

Der Erwartungswert für den Erlös bei 10000 gefangenen Fischen beträgt 5500 € .

3.Schulrucksäcke
Berechnung des Mittelwertes der Schulranzenmasse M:
M = (3 · 3,5kg + 6 · 4kg + 7 · 4,5kg + 8 · 5kg + 4 · 5,5kg + 2 · 6kg)/30 = 4,67kg.
Es kommen 6 Schüler mit einem Rucksack von 4kg in die Schule, das sind 6/30 = 20%.
Es tragen 14 Schüler einen Rucksack mit 5kg und mehr, das entspricht 14/30 = 46,67%

4. Sportverein
Anzahl der Mitglieder im Jahr 1998: 50 + 60 + 30 = 140.
Die Tennisabteilung hatte im Mittel in den letzten fünf Jahren
(50 + 45 + 45 + 40 + 40)/5 = 44 Mitglieder.
Volleyball: Mitgliederzahlanstieg von 40 auf 50, das entspricht 10/40 = 25%.
Turnen: Mitgliederanstieg von 60 auf 70, das entspricht 10/60 = 16,7%.
Erwartete Mitgliederzahlen im Jahr 2003:
Tennis: 40 + 4 = 44
Turnen: 70 + 7 = 77
Volleyball: 50 + 5 = 55



5. Stein - Schere – Papier

a)

	Stein	Schere	Papier
Stein	Unentschieden	Stein gewinnt	Papier gewinnt
Schere	Stein gewinnt	unentschieden	Schere gewinnt
Papier	Papier gewinnt	Schere gewinnt	unentschieden

Alle Fälle werden als gleichwahrscheinlich angenommen. Stein, Schere und Papier gewinnen jeweils gegen einen und verlieren gegen einen anderen. Damit gewinnen sie in einer von 2 gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten (Unentschieden wird vernachlässigt). Damit beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit jeweils ½.

b)

	Stein	Schere	Papier	Brunnen
Stein	unentschieden	Stein gewinnt	Papier gewinnt	Brunnen gewinnt
Schere	Stein gewinnt	unentschieden	Schere gewinnt	Brunnen gewinnt
Papier	Papier gewinnt	Schere gewinnt	unentschieden	Papier gewinnt
Brunnen	Brunnen gewinnt	Brunnen gewinnt	Papier gewinnt	unentschieden

Stein und Schere gewinnen jeweils in einem von drei Fällen, Papier und Brunnen in zwei von drei Fällen. Damit ergeben sich für Stein und Schere jeweils Gewinnwahrscheinlichkeiten von $\frac{1}{3}$, für Papier und Brunnen jeweils von $\frac{2}{3}$.

6. Glücksrad

Da der große Sektor doppelt so groß ist, wie die anderen, kann er wie zwei Sektoren behandelt werden.

a) Damit bleibt der Zeiger mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{11}$ auf der 10 stehen.

b) p(„7“) = $\frac{1}{11}$

c) Es gibt fünf ungerade Zahlen, die alle gleichwahrscheinlich sind, und fünf Zahlen, die gerade sind, wobei die 10 doppelt zählt. Damit gilt p(„ungerade“) = $\frac{5}{11}$ und p(„gerade“) = $\frac{6}{11}$.

Das Spiel ist nicht fair, da die Chancen für Sieg und Niederlage nicht gleich sind.

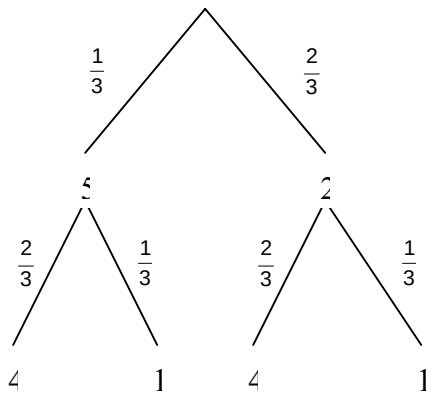
7. Hoch gewinnt

Die Gewinnwahrscheinlichkeit C gegen C beträgt 0, da es immer ein Unentschieden geben wird.

a) A gegen B:

1. Stufe:
Wurf Würfel A

2. Stufe:
Wurf Würfel B



p(5;4) = $\frac{1}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ (Würfel A gewinnt)

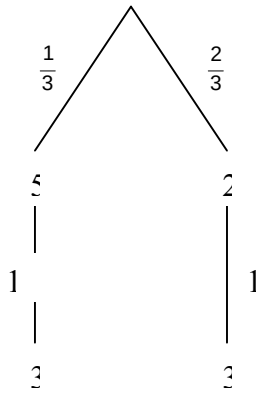
p(5;1) = $\frac{1}{3} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (Würfel A gewinnt)

$p(2;4) = \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (Würfel B gewinnt)

$p(2;1) = \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ (Würfel A gewinnt)

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Würfel A gegen Würfel B beträgt $\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$, für Würfel B gegen Würfel A entsprechend $\frac{4}{9}$.

A gegen C:
1. Stufe:
Wurf Würfel A



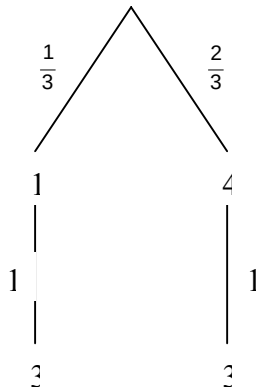
2. Stufe:
Wurf Würfel C

$p(5;3) = \frac{1}{3} \bullet 1 = \frac{1}{3}$ (Würfel A gewinnt)

$p(2;3) = \frac{2}{3} \bullet 1 = \frac{2}{3}$ (Würfel C gewinnt)

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Würfel A gegen Würfel C beträgt $\frac{1}{3}$, für Würfel C gegen Würfel A entsprechend $\frac{2}{3}$.

B gegen C:
1. Stufe:
Wurf Würfel B



2. Stufe:
Wurf Würfel C

$p(1;3) = \frac{1}{3} \bullet 1 = \frac{1}{3}$ (Würfel C gewinnt)

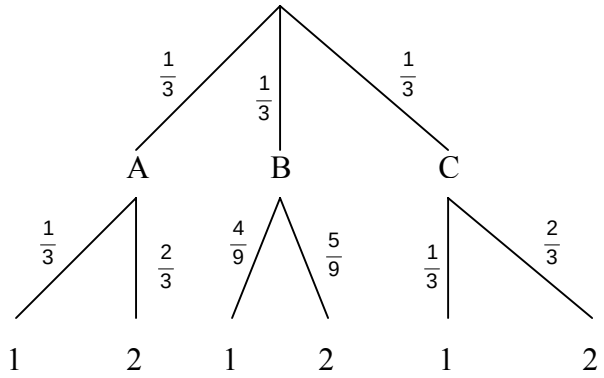
$p(4;3) = \frac{2}{3} \bullet 1 = \frac{2}{3}$ (Würfel B gewinnt)

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Würfel B gegen Würfel C beträgt $\frac{2}{3}$, für Würfel C gegen Würfel A entsprechend $\frac{1}{3}$.

b) Wenn man davon ausgeht, dass Spieler 2 gewinnen will und sinnvoll handelt, so wird er gegen Würfel A Würfel C wählen, gegen Würfel B Würfel A und gegen Würfel C Würfel B. Weiter ist davon auszugehen, dass Spieler 1 alle Würfel mit gleicher Wahrscheinlichkeit zugelost bekommt.

1. Stufe:
Zugeloster Würfel für Spieler A

2. Stufe:
Spielernummer des Gewinners



Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler 2 beträgt also $\frac{1}{3} \bullet \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \bullet \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{17}{27}$.

8. Zwei Würfel

a)

Es gibt bei einem Wurf mit beiden Würfeln 24 gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten (Elementarereignisse) mit der Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{24}$. In der folgenden Tabelle sind die Gewinnfälle für Anna und für Bernd eingetragen:

	1	2	3	5	5	6
1	*	A	A	A	A	A
2	B	*	A	A	A	A
3	B	B	*	A	A	A
4	B	B	B	*	A	A

Die Wahrscheinlichkeit, dass Bernd gewinnt sei x.

<u>1. Lösung:</u>

Bernd gewinnt sofort in 6 von diesen 24 Fällen also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass im ersten Wurf zum Gleichstand kommt ist p:= $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Dann sind beide Spieler anschließend wieder in der Ausgangssituation.

Es gilt also $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot x$

Lösen wir diese Gleichung erhalten wir: $x = \frac{3}{10}$.

<u>2. Lösung:</u>

Die Wahrscheinlichkeit, dass Bernd erst im k. Wurf gewinnt ist: $p^{k-1} \cdot \frac{1}{4}$.

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass er irgendwann gewinnt:

$$x = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-p} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$$

<u>3. (erwartete, naive) Lösung:</u>

20 gleichwahrscheinliche Fälle führen zur Entscheidung, davon sind 6 günstig für Bernd.

Also $x = \frac{3}{10}$

b)

<u>1. Lösung:</u>

Mit jeweils der gleichen Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{24}$ kommt es für Anna zu folgenden Auszahlungen:

	1	2	3	5	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	-1	0	1	2	3	4
3	-2	-1	0	1	2	3
4	-3	-2	-1	0	1	2

Die Summe dieser Auszahlungen beträgt: 34 – 10 = 24 . Also kann Anna 1 Chip erwarten.

<u>2. Lösung: (Linearität des Erwartungswertes):</u>

Mit ihrem Würfel erwartet Anna die Augenzahl $\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

Mit seinem Würfel erwartet Bernd die Augenzahl $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

Die Differenz beträgt 1.

9. Triebwerksausfall

Es sei L/R das Ereignis, dass beide Triebwerke links/rechts ausfallen.

Es gilt $P(L) = P(R) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$.

Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit von „L oder R“ .

$$P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R) = \frac{1}{10000} + \frac{1}{10000} - \frac{1}{100000000} \approx \frac{1}{5000} \ .$$

10. G³

Insgesamt ist 827 mal gewürfelt worden. Damit erhalten die drei schon eine brauchbare Näherung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels. In die Tabelle wird nun die absolute und die relative Häufigkeit für die gewürfelte Augenzahl eingetragen.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Gundula	23	9	34	45	6	60
Gustavia	55	13	77	93	12	100
Gundolf	43	11	65	84	10	87
Absolute Häufigkeit	121	33	176	222	28	247
Relative Häufigkeit	0,146	0,040	0,213	0,268	0,034	0,299

Damit erhält man (im Rahmen einer vernünftigen Genauigkeit) die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkleit für eine Augenzahl	0,15	0,04	0,21	0,27	0,03	0,30

Nun wird der Erwartungswert aus der Sich der drei Losbudenbetreiber gebildet:

Ereignis	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkleit für eine Augenzahl	0,15	0,04	0,21	0,27	0,03	0,30
Gewinn pro Spiel in Euro	1	1	0	1	1	-2

Der zu erwartende Gewinn pro Spiel beträgt also:
$(0{,}15+0{,}04+0{,}27+0{,}03)\cdot 1€+0{,}21\cdot 0€-0{,}30\cdot 2€=-0{,}11€$
Im Durchschnitt machen die drei Losbudenbetreiber pro Spiel einen Verlust von 0,11€. Sie können also nicht damit rechnen, einen Gewinn zu machen.

Kommentar:

- In der Lösung sollte die Anzahl der Würfe thematisiert werden. 827 Würfe sind erst mal schon eine brauchbare Anzahl, reichen aber nicht aus, um die Wahrscheinlichkeiten auf drei Stellen nach dem Komma anzugeben.
- Absolute und relative Häufigkeiten gehören zum Standardrepertoire. Deshalb muss nicht extra angegeben werden, wie diese berechnet werden.
- Wahrscheinlichkeiten können auch in Prozent angeben werden.
- Der Übersichtlichkeit halber sind drei Tabellen gebildet worden. Eine Schülerlösung, in der alles in einer Tabelle bearbeitet, ist auch richtig. Tabellen in einer Schülerlösung sind nicht zwingend notwendig.
- Bei der Berechnung des Erwartungswertes ist die Einheit Euro benutzt worden. Eine Schülerlösung ohne Einheiten in den Rechnungen ist dann vollständig richtig zu bewerten, wenn zumindest im Antwortsatz die Einheit sinnvoll auftritt.