

Unterlagen für die Lehrkraft

KLAUSUR
im Kurshalbjahr 12/II

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart
Aufgabenstellung aus dem Bereich **Analysis**

2. Aufgabenstellung

siehe Aufgabenblatt für die Schülerinnen und Schüler

3. Materialgrundlage

./.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln in Sachzusammenhängen
- Flächenberechnung durch Integration

5. Zugelassene Hilfsmittel

- wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die für die Teilaufgabe zu erreichende Höchstpunktzahl kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die in den für jede Aufgabe gesondert erstellten Bewertungsvorgaben angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität für jede Teilaufgabe.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integriert.

Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOST) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

6.2.1 Modelllösungen I. Teilaufgabe

| Lösungsskizze | |
|----------------------|--|
| a | <p>Der Graph von g geht durch die Punkte $(0 f(0)) = (0 300)$ und $(12 f(12)) = (12 408)$.</p> <p>Die Funktion g ist linear mit $g(x) = \frac{408 - 300}{12 - 0}(x - 0) + 300 = 9x + 300$</p> <p>Die Skizze wird um den Graphen von $g(x)$ (Verbindungsstrecke der genannten Punkte) ergänzt.</p> |
| b | <p>Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f über dem Intervall I streng monoton fallend.</p> <p>Es gilt: $f'(x) = 3x^2 - 36x + 81 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 9$.</p> <p>Wegen z.B. $f'(4) = -15$ ist (die quadratische Funktion) f' für $3 < x < 9$ negativ, die Funktion f dort also fallend. (Eine Argumentation über Hoch- und Tiefpunkt oder über Ungleichungsumformungen ist auch möglich.) Der Absatz nimmt in den Monaten Juni bis November 2006 einschließlich ab.</p> |
| c | <p>Dem zweiten Halbjahr 2006 entspricht das Intervall $[4;10]$, da die Beobachtung Anfang März beginnt. Die größte Veränderung findet im Innern oder an den Rändern des Intervalls statt. Wenn die Ableitung f' im Innern des Intervalls eine Extremstelle hat, dann ist diese eine Wendestelle der Funktion f. Zur Ermittlung der stärksten Veränderung des Graphen wird also die Funktion f auf Wendestellen untersucht.</p> <p>Wegen $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ und $f'''(6) = 6 < 0$ ist $x = 6$ Wendestelle von f mit $f'(6) = -27$. An den Rändern gilt $f'(4) = -15$ bzw. $f'(10) = +21$. Der gesuchte Zeitpunkt größter Veränderung ist also tatsächlich $x = 6$ d.h. Anfang September.</p> |
| d | <p>Die Differenzfunktion $d = f - g$ mit $d(x) = x^3 - 18x^2 + 72x$, $0 \leq x \leq 12$, muss ein Extremum besitzen.</p> <p>Wegen $d'(x) = 3x^2 - 36x + 72 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \pm 2\sqrt{3}$ und $d''(x) = 6x - 36$ mit $d''(6 \pm 2\sqrt{3}) = \pm 12\sqrt{3}$ treten nach $6 - 2\sqrt{3} \approx 2,5$ bzw. $6 + 2\sqrt{3} \approx 9,5$ Monaten, also Mitte Mai bzw. Mitte Dezember die größten Differenzen zwischen den Prognosen der beiden Institute auf.</p> <p>Die Steigung beider Graphen muss zur Zeit größten Abstands gleich sein, nämlich gleich 9. Der Ansatz mit gleichen Zuwachsraten (Steigungen)</p> <p>$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 81 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 24 = 0$ führt auf dieselbe Bedingung wie oben. (Äquivalente Bedingung)</p> |
| e | <p>Es gilt:</p> $\int_0^{12} (x^3 - 18x^2 + 81x + 300) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 6x^3 + \frac{81}{2}x^2 + 300x \right]_0^{12} = 4248 \text{ und } \frac{1}{2}(300 + 408) \cdot 12 = 4248.$ <p>Beide Flächeninhalte stimmen also überein.</p> <p>Um den Absatz selbst zu ermitteln, müsste man den Wert 4248 noch mit der Anzahl der in der Aufgabenstellung erwähnten Zeiteinheiten pro Monat multiplizieren. Dieser für beide Prognosen gleiche Faktor ändert nichts an der Tatsache, dass der zu erwartende Jahresabsatz beide Mal der gleiche ist.</p> |

Name: _____ Kursbezeichnung: _____

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien**Teilaufgabe a)**

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|-----------------|----|----|----|
| | | max. (AFB) | EK | ZK | DK |
| | Die Schülerin/Der Schüler | | | | |
| 1 | berechnet die Koordinaten der Randpunkte der Funktion f . | 2 (I) | | | |
| 2 | berechnet den Funktionsterm von g und skizziert den Graphen von g in Abbildung 1. | 3 (I) | | | |
| 3 | Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | | | |
| | Summe Teilaufgabe a) | 5 | | | |

Teilaufgabe b)

| | | | | | |
|---|---|----------|--|--|--|
| 1 | berechnet die 1. Ableitung und deren Nullstellen. | 4 (I) | | | |
| 2 | gibt den gewünschten Zeitraum mit Hilfe der Nullstellenbestimmung begründet an. | 5 (II) | | | |
| 3 | Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | | | |
| | Summe Teilaufgabe b) | 9 | | | |

Teilaufgabe c)

| | | | | | |
|---|---|-----------|--|--|--|
| 1 | gibt die Randstellen des Intervalls und Wendestellen im Innern des Intervalls als mögliche Stellen größter Veränderung an. | 3 (III) | | | |
| 2 | ermittelt die Wendestelle, die Werte der Ableitung dort und an den Intervallrändern und interpretiert das Ergebnis. | 8 (II) | | | |
| 3 | Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | | | |
| | Summe Teilaufgabe c) | 11 | | | |

Teilaufgabe d)

| | | | | | |
|---|---|-----------|--|--|--|
| 1 | gibt die Differenzfunktion als geeigneten Lösungsansatz der Aufgabenstellung an und ermittelt die Extremwerte dieser Funktion. | 10 (II) | | | |
| 2 | begründet die Übereinstimmung der Zeitpunkte größter Absatz-Differenz mit den Zeitpunkten gleicher Zuwachsraten. | 4 (III) | | | |
| 3 | Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | | | |
| | Summe Teilaufgabe d) | 14 | | | |

Teilaufgabe e)

| | Die Schülerin/der Schüler | max. (AFB) | EK | ZK | DK |
|---|---|-----------------------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | ermittelt durch Integration die Maßzahlen der Flächen zwischen den Graphen von f und g und der x -Achse und vergleicht sie. | 7 (I) | | | |
| 2 | interpretiert begründet die berechneten Flächeninhalte als Maß für die prognostizierten Jahresabsatzwerte. | 4 (II) | | | |
| 3 | Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | | | |
| | Summe Teilaufgabe e) | 11 | | | |

| | | | | | |
|--|-------------------------|-----------|--|--|--|
| | Summe insgesamt: | 50 | | | |
|--|-------------------------|-----------|--|--|--|

Die Klausur wird mit der Note: _____ bewertet.

Unterschrift(en) der Korrektoren:

Datum: