

Unterlagen für die Lehrkraft

KLAUSUR
im Kurshalbjahr 12/II

Mathematik, Leistungskurs

1. **Aufgabenart**
Aufgabenstellung aus dem Bereich **Stochastik**

2. **Aufgabenstellung**

siehe Aufgabenblatt für die Schülerinnen und Schüler

3. **Materialgrundlage**

./.

4. **Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'**

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*

- Wahrscheinlichkeit
- Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
- einseitiger Hypothesentest

5. **Zugelassene Hilfsmittel**

- wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. **Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen**

6.1 **Allgemeine Hinweise**

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die für die Teilaufgabe zu erreichende Höchstpunktzahl kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die in den für jede Aufgabe gesondert erstellten Bewertungsvorgaben angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität für jede Teilaufgabe.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integriert.

Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOST) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

6.2.1 Modellösungen

Lösungsskizze																	
a	<p>– Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Zylinder die Farben <i>blau</i> oder <i>grün</i> zeigen: Das Ereignis <i>blau oder grün</i> hat die Wahrscheinlichkeit 0,475 . $p = 1 - 0,475^3 \approx 0,893$.</p> <p>– Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Zylinder verschiedene Farben zeigen: Es gibt $3! = 6$ verschiedene Wege mit paarweise verschiedenen Farben. Jeder Weg hat die Wahrscheinlichkeit $0,2375 \cdot 0,2375 \cdot 0,525$. $p = 6 \cdot 0,2375 \cdot 0,2375 \cdot 0,525 \approx 0,178$.</p> <p>– Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Zylinder <i>grün</i> zeigt: Im Baum mit den Ereignissen <i>grün</i> und <i>nicht grün</i> gibt es 3 verschiedene Wege, auf denen genau einmal <i>grün</i> vorkommt: $p = 3 \cdot (0,2375 + 0,525)^2 \cdot 0,2375 \approx 0,414$.</p>																
b	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Auszahlung</th> <th>p</th> <th>$p \cdot$ Auszahlung</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: right;">0,525 — rot</td> <td style="text-align: center;">$a - 2$</td> <td style="text-align: center;">0,525</td> <td style="text-align: center;">$(a - 2) \cdot 0,525$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">0,2375 — blau</td> <td style="text-align: center;">$0,5a$</td> <td style="text-align: center;">0,2375</td> <td style="text-align: center;">$0,5a \cdot 0,2375$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">0,2375 — grün</td> <td style="text-align: center;">$2a$</td> <td style="text-align: center;">0,2375</td> <td style="text-align: center;">$2a \cdot 0,2375$</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">Erwartungswert der Auszahlung: $E = (a - 2) \cdot 0,525 + (0,5a + 2a) \cdot 0,2375$ $= 1,11875a - 1,05$</p> <p>Um einen Gewinn erwarten zu können, muss der Erwartungswert der Auszahlung E größer als der Einsatz a sein bzw. $E - a = 0,11875a - 1,05 > 0$. Das ist für $a > 8,84$ [Euro] der Fall.</p>		Auszahlung	p	$p \cdot$ Auszahlung	0,525 — rot	$a - 2$	0,525	$(a - 2) \cdot 0,525$	0,2375 — blau	$0,5a$	0,2375	$0,5a \cdot 0,2375$	0,2375 — grün	$2a$	0,2375	$2a \cdot 0,2375$
	Auszahlung	p	$p \cdot$ Auszahlung														
0,525 — rot	$a - 2$	0,525	$(a - 2) \cdot 0,525$														
0,2375 — blau	$0,5a$	0,2375	$0,5a \cdot 0,2375$														
0,2375 — grün	$2a$	0,2375	$2a \cdot 0,2375$														
c	<p>Die Wahrscheinlichkeit für die Farbe rot hängt von dem Verhältnis von Durchmesser und Länge des Zylinders ab. Über dieses Verhältnis wird keine Aussage gemacht. Während die Homogenität des Zylinders die Gleichwahrscheinlichkeit der beiden Farben grün und blau liefert, gibt es kein Argument für eine Abweichung der Wahrscheinlichkeit für die Farbe rot vom Schätzwert $\frac{63}{120} = 0,525$.</p>																
d	<p>Das Ergebnis wird als nicht außergewöhnlich angesehen, wenn es innerhalb der 1σ-Umgebung des Erwartungswertes liegt. Wegen $\sigma = \sqrt{n \cdot p(\text{rot}) \cdot (1 - p(\text{rot}))} = \sqrt{120 \cdot 0,5 \cdot 0,5} \approx 5,48 > 3 = 63 - n \cdot p(\text{rot})$ ist das der Fall.</p>																
e	<p>Die Versuchszahl n muss so gewählt werden, dass die absolute Häufigkeit $0,525n$ der Farbe rot oberhalb der $1,64\sigma$-Umgebung des Erwartungswertes $\mu = n \cdot p$ liegt:</p> $0,525n > \mu + 1,64 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ <p>Mit der auszuschließenden Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ ergibt sich</p> $0,525n > 0,5n + 1,64 \cdot \sqrt{0,25n} \quad \text{und daraus} \quad n > 1075,84 .$ <p>Für $n \geq 1076$ ist die Hypothese $p(\text{rot}) \leq 0,5$ bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit 5% zu verwerfen.</p>																

Name: _____ Kursbezeichnung: _____

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		max. (AFB)	EK	ZK	DK
	Die Schülerin/Der Schüler				
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Zylinder <i>blau</i> oder <i>grün</i> zeigen.	4 (I)			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Zylinder verschiedene Farben zeigen.	4 (I)			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Zylinder <i>grün</i> zeigt.	4 (I)			
4	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe a)	12			

Teilaufgabe b)

1	berechnet den Erwartungswert des Auszahlungsbetrages.	8 (I)			
2	bestimmt den für einen Gewinn erforderlichen Einsatz.	3 (II)			
3	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe b)	11			

Teilaufgabe c)

1	begründet ihre/seine Entscheidung.	6 (II)			
2	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe c)	6			

Teilaufgabe d)

1	interpretiert und beurteilt die Aussage der Aufgabenstellung.	9 (III)			
2	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe d)	9			

Teilaufgabe e)

1	ermittelt die notwendige Anzahl der Würfe.	12 (II)			
2	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe e)	12			

		max. (AFB)	EK	ZK	DK
	Summe insgesamt:	50			

Die Klausur wird mit der Note: _____ bewertet.

Unterschrift(en) der Korrektoren:

Datum: