Klausur 11 Lösungen

Aufgabe 1

a) Ableitungen: f ' (x) = x – 2 , f '' (x) = 1 , f ''' (x) = 0

b) Mittlere Steigung im Intervall [0;2]: m = $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{-1-1}{2}$ = -1

c) Steigung in x = 1: f ' (1) = 1 – 2 = -1

d) Gleichung der Tangente in x = 1:
Die Gleichung der Tangente hat die Form y = a * x + b.
Es ist a = f ' (1) = -1 (siehe c).
Die Tangente geht durch den Punkt (1 / 0,5).
Durch Einsetzen der Koordinaten dieses Punktes und der Steigung erhält man
- 0,5 = (-1) * 1 + b. Also ist b = 0,5. Die Tangente hat die Gleichung y = -x + 0,5.

e) Punkt, in dem der Funktionsgraph die Steigung –3 hat:
f ' (x) = -3 ⇔ x – 2 = -3 ⇔ x = -1
Da f (-1) = 3,5 , hat der Graph in (-1 / 3,5) die Steigung -3.

f) Berechnung der Ableitung in x = 2 mit dem Differenzenquotienten:
Die Berechnung wird abhängig vom Unterricht mit h → 0 bzw. x → 2 erfolgen.

Variante mit h → 0

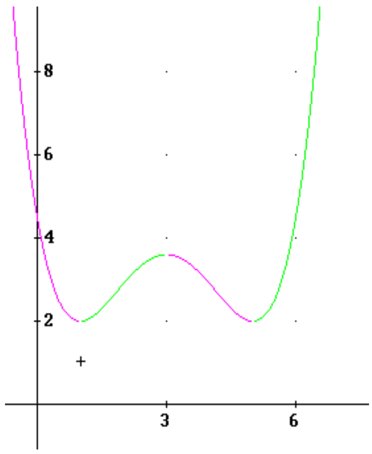
$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0{,}5*(2+h)^2-2*(2+h)+1-(-1)}{h} = \ldots = 0$$

Variante mit x → 2

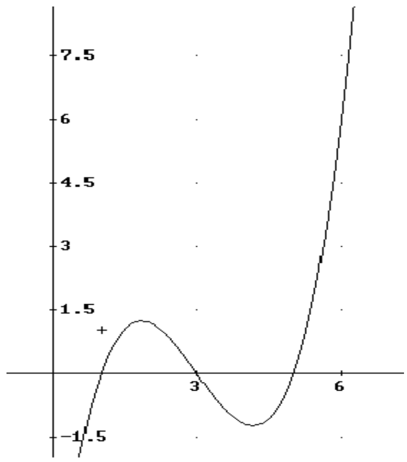
$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{0{,}5x^2-2x+1-(-1)}{x-2} = \ldots = 0$$

Aufgabe 2

a) $\mathbf{g}_1'$ kann nicht in Frage kommen; $\mathbf{g}_1'$ hat zwei Nullstellen (mit Vorzeichenwechsel) und infolgedessen hat $\mathbf{g}_1$ zwei relative Extrema.
$\mathbf{g}_2'$ könnte von der Zahl und Lage der Nullstellen als Ableitung in Frage kommen.
Eine Untersuchung des Steigungsverhaltens von **f** zeigt aber, dass das Steigungsverhalten von **f** genau entgegengesetzt zum Vorzeichen von $\mathbf{g}_2'$ ist.
Alternativ kann man auch mit dem Vorzeichenwechsel von $\mathbf{g}_2'$ an den Nullstellen argumentieren; hier passt genau die Rolle von Maximum und Minimum nicht zur Art des Vorzeichenwechsels.



Graph von **f**

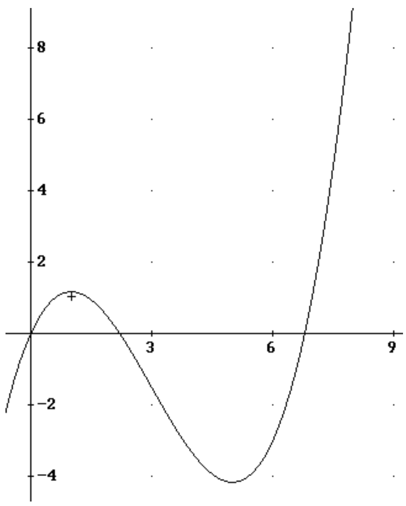


Graph von **f '**

Farbige Markierung des Graphen von **f:** die Bereiche, in denen $\mathbf{f}'(x)>0$ ist, sind grün markiert.

Aus der Markierung und aus den Überlegungen zu a) ergibt sich (im Rahmen einer qualitativen Skizze), dass die gesuchte Ableitungsfunktion aus $\mathbf{g}_2'$ durch Spiegelung an der x-Achse entstehen müsste.

b) $\mathbf{g}_1$ muss eine ganzrationale Funktion 3. Grades sein mit einem Hochpunkt bei x = 1, einem Tiefpunkt bei x = 5 und einem Wendepunkt bei x = 3.
Hier für den y-Achsenabschnitt gleich 0 gezeichnet.
(Der Graph wurde hier mit einem Funktionenplotter gezeichnet, von den Schülern wird nur eine qualitative Handskizze erwartet.)



Möglicher Graph von $\mathbf{g}_1$

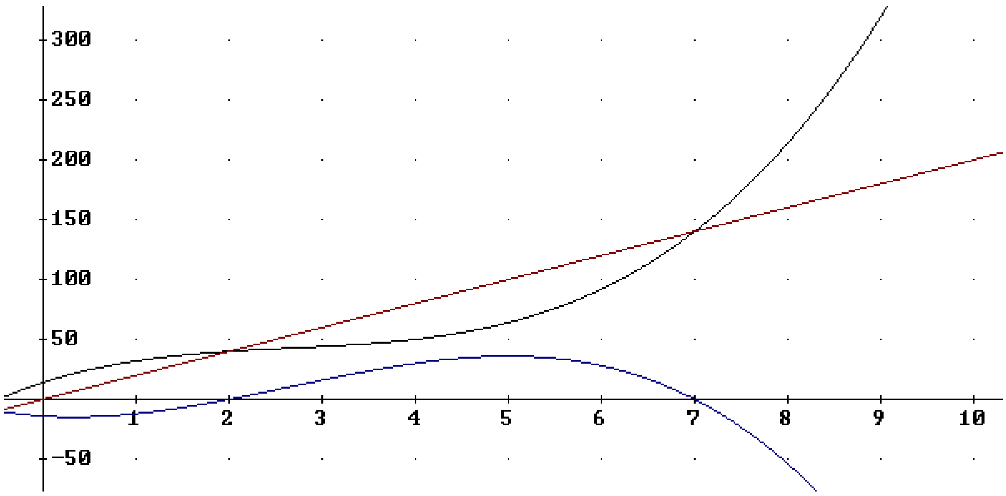
Aufgabe 3

a) $f'(x) = 3x^2 - 16x + 25$. Das notwendige Kriterium für lokale Extremstellen ist nicht erfüllbar, da für alle reellen x gilt: $3x^2 - 16x + 25 = 3(x-8/3)^2 + 11/3 > 0$.
Es ist $f''(x) = 6x - 16$, $f''(8/3) = 0$ und $f'''(8/3) = 6$.
Nach dem hinreichenden Kriterium ist 8/3 Wendestelle von f.

b) Die Schnittstellen von f und g sind die Nullstellen der Differenzfunktion
$d(x) = -x^3 + 8x^2 - 5x - 14$.
Es gilt $d(2) = 0$ Polynomdivision: $(-x^3+8x^2-5x-14):(x-2) = -x^2 + 6x + 7$.
Die quadratische Gleichung $-x^2+6x+7$ hat die Nullstellen -1 und 7.
Die Schnittstellen von f und g sind also -1;2 und 7.

c) $d'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = 0$ ergibt die Kandidaten 1/3 und 5.
$d''(x) = -6x + 16$, $d''(1/3) = 14 > 0$, $d''(5) = -14 < 0$.
Nach dem hinreichenden Kriterium hat d an der Stelle 1/3 ein lokales Minimum und an der Stelle 5 ein lokales Maximum.

d)



e)1. Die Differenzfunktion d berechnet den Gewinn des Unternehmens.
Aus der Zeichnung ist ablesbar, dass das Unternehmen im Bereich von 2 bis 7 Produktionseinheiten keinen Verlust macht.

2. Der Gewinn des Unternehmens ist maximal, wenn 5 Einheiten produziert werden. Bei 1/3 Produktionseinheiten macht die Firma maximalen Verlust.

3. f(0) gibt die "Fixkosten" des Unternehmens an, das sind die Kosten, die auch dann anfallen, wenn nichts produziert wird. Beispiele: Grundstückskosten, Mieten, Zinsbelastungen, Wartung der Maschinen etc.