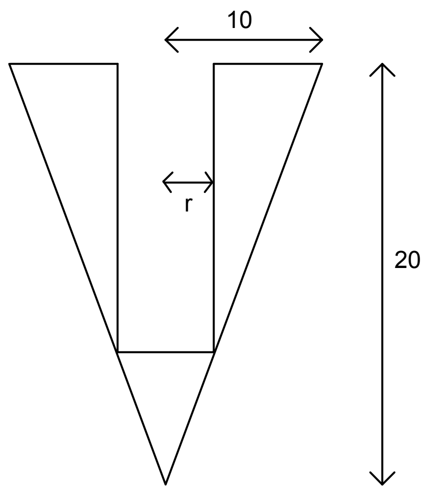
Aufgabe 3a.1: ***Die Blumenvase***

Eine Blumenvase soll hergestellt werden, indem in einen geraden Kegel ein zylindrisches Loch gebohrt wird.



Der Kegel habe einen Grundkreisradius von 10 cm und eine Höhe von 20 cm. Der eingebohrte Zylinder habe den Radius r.

Natürlich kann man in Wirklichkeit das Loch nicht ganz bis an den Kegelrand bohren. Dieses Problem sollst du aber hier vernachlässigen.

Alternative ohne CAS

a) Zeigen Sie, dass die folgende Formel das Volumen des einbeschriebenen Zylinders beschreibt : $V_{Zylinder} = -2\pi r^3 + 20\pi r^2$

b) Wie sollte der Radius des Bohrloches gewählt werden, damit die Wasserversorgung der Blumen in der Vase möglichst lange gewährleistet werden kann?

c) Mit wie viel Wasser kann die Vase in diesem Fall maximal befüllt werden?

Alternative mit CAS

a) Zeigen Sie, dass die folgende Formel das Volumen des einbeschriebenen Zylinders beschreibt : $V_{Zylinder} = -2\pi r^3 + 20\pi r^2$

b) Wie sollte der Radius des Bohrloches gewählt werden, damit die Wasserversorgung der Blumen in der Vase möglichst lange gewährleistet werden kann?

c) Mit wie viel Wasser kann die Vase in diesem Fall maximal befüllt werden?

d) Welchen Radius sollte das Bohrloch haben, damit der Oberflächeninhalt der Vase maximale Größe erreicht ? Wie groß ist der Oberflächeninhalt in diesem Fall? Interpretieren Sie das Ergebnis unter Berücksichtigung der Ergebnisse der vorhergehenden Aufgabenteile.

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a.1 "Die Blumenvase" – ohne CAS

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR
Teil a) :		
Unter Verwendung des Strahlensatzes kann der gegebene Zusammenhang hergeleitet werden : Strahlensatz : $\frac{20-h}{20}=\frac{r}{10} \Rightarrow h = 20-2r$ $V_{Zylinder} = \pi r^2 h = \pi r^2 (20 - 2r) = -2 \pi r^3 + 20 \pi r^2$	Schüler sollen aus den gegebenen Informationen einen Funktionsterm aufstellen	
Teil b) :		
$V'_{Zylinder} = -6 \pi r + 40 \pi r$ $V'_{Zylinder} = 0 \Rightarrow r = 20/3$ Mittels Vorzeichenbetrachtung Nachweis des Maximums	Schüler sollen ein reales Problem in ein mathematisches Optimierungsproblem übertragen und Kenntnisse über Lösungsverfahren bei Extremwertproblemen anwenden	
Teil c) :		
$V_{Zylinder} (20/3) = 930{,}84$	Schüler sollen den Funktionswert einer gegebenen Funktion an einer bestimmten Stelle ausrechnen	Elementare Berechnungen

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a.1 "Die Blumenvase" – mit CAS

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS
Teil a) :		
Unter Verwendung des Strahlensatzes kann der gegebene Zusammenhang hergeleitet werden : Strahlensatz : $\frac{20-h}{20} = \frac{r}{10} \Rightarrow h = 20 - 2r$ $V_{Zylinder} = \pi r^2 h = \pi r^2 (20 - 2r) = -2 \pi r^3 + 20 \pi r^2$	Schüler sollen aus den gegebenen Informationen einen Funktionsterm aufstellen	
Teil b) :		
$V'_{Zylinder} = -6 \pi r + 40 \pi r$ $V'_{Zylinder} = 0 \Rightarrow r = 20/3$ Nachweis des Maximums mittels zweiter Ableitung	<u>Schüler sollen ein reales Problem strukturieren und Funktionen untersuchen (Extremwertuntersuchung)</u>	Exakte Ermittlung des Maximums mittels CAS
Teil c) :		
$V_{Zylinder}(20/3) = 930{,}84$	Schüler sollen den Funktionswert einer gegebenen Funktion an einer bestimmten Stelle ausrechnen	
Teil d) :		
$O_{Zylinder} = \pi r^2 + 2 \pi r h = -3 \pi r^2 + 40 \pi r$ $O`_{Zylinder} = 0 \Rightarrow r = 20/3$ Nachweis des Maximums mittels zweiter Ableitung $O_{Zylinder}(20/3) = 418{,}88$	Schüler sollen ein reales Problem strukturieren, eine Funktionsgleichung aufstellen und diese auf Extremstellen untersuchen	Exakte Ermittlung des Maximums mittels CAS