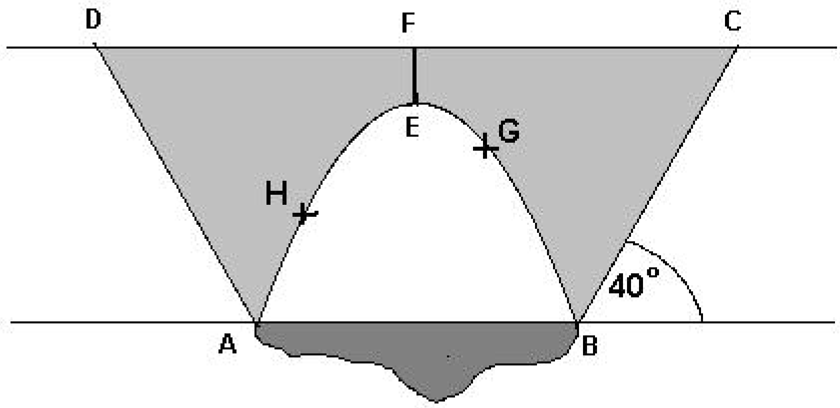
Aufgabe 3a.2: *Die Brücke*

ohne CAS:

(a) Beim Bau einer Eisenbahnlinie ist über einem Flusstal eine Brücke entsprechend der nachfolgenden Zeichnung (nicht maßstäblich) so zu errichten, dass die Gleise horizontal verlaufen.



G liegt 30 m rechts von E und 54,7 m über dem Wasserspiegel.
H liegt 50 m links von E und 37,1 m über dem Wasserspiegel.

Die Länge der Strecke $\overline{EF}$ soll aus Stabilitätsgründen 3 m betragen.

(i) Ermitteln Sie eine Gleichung für den Parabelbogen AEB
(mögliche Lösung: $y = -0{,}011x^2 + 64{,}6$).

(ii) Berechnen Sie die Breite des Flusses.

(b) Einige Kilometer weiter verläuft die Bahnstrecke auf einem Erdwall. Hier soll unter der Bahnstrecke ein Abwassertunnel gemauert werden, dessen Querschnittsfläche die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten soll. Die Umrahmung soll dabei insgesamt 6 m betragen.
Zeigen Sie, dass für die Querschnittsfläche in Abhängigkeit vom Radius r gilt:

$A(r) = -0{,}5\pi r^2 + 6r - 2r^2$ und ermitteln Sie die Maße für diesen Abwassertunnel, wenn die Querschnittsfläche möglichst groß sein soll.

mit CAS:

Die Abbildung zeigt einen Träger einer alten Skischanze.

(a) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen ungefähren Wert für die lichte Höhe des Trägers.

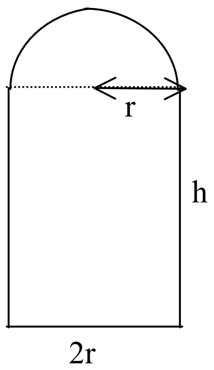
(b) Der bogenförmige Teil des Trägers kann näherungsweise als Teil einer Parabel oder Teil eines Kreises aufgefasst werden. Ermitteln Sie jeweils eine geeignete Funktionsgleichung.

(c) Beurteilen Sie, welche Näherung angemessener ist.

(d) Berechnen Sie das Gewicht des sichtbaren Teils eines Trägers, wobei davon auszugehen ist, dass der bogenförmige Teil des Trägers als Teil eines Kreises aufgefasst wird und der ganze Träger eine quadratische Querschnittsfläche mit 50 cm Kantenlänge besitzt. Die Dichte von Beton beträgt 2,4 t / m^3.

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a.2 "Die Brücke" – ohne CAS

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	Punkte
Teil a) :			
Teil (i): Ansatz nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems (x-Achse durch A und B ; y-Achse durch E bzw. F): $y = ax^2 + b$; $(a<0 ; b>0)$ G und H liegen auf der Parabel $\Rightarrow$ $54{,}7 = a \cdot 900 + b \wedge 37{,}1 = a \cdot 2500 + b$ Subtraktion der beiden Gleichungen $\Rightarrow$ $-17{,}6 = 1600\, a \Rightarrow a = -0{,}011$ Einsetzen in die 1. Gleichung $\Rightarrow 54{,}7 = -9{,}9 + b$ $\Rightarrow b = 64{,}6$ $\Rightarrow y = -0{,}011\, x^2 + 64{,}6$ ist die Gleichung der gesuchten Parabel.	Schüler sollen aus den gegebenen Informationen einen Funktionsterm aufstellen bei geeigneter Wahl eines Koordinatensystems	Rechenhilfe zur Lösung des linearen Gleichungssystems	6
Teil (ii) Nullstellenbestimmung: $-0{,}011\, x^2 + 64{,}6 = 0 \Rightarrow$ $x = 76{,}63 \vee x = -76{,}63$ Flussbreite $\overline{AB} = 2 \cdot 76{,}63$ m $= 153{,}26$ m	Schüler nutzen die Bedeutung der Nullstellen für die Lösung eines realen Problems	Lösung der quadratischen Gleichung	2

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	Punkte
Teil b) :			
Querschnittsfläche $A = 0{,}5\,\pi r^2 + 2rh = f(r;h)$ Nebenbedingung : $6 = 2r + h + h + \pi r \Rightarrow$ $h = 3 - r - 0{,}5\pi r$ Einsetzen in f(r;h) ergibt: $A = 0{,}5\,\pi r^2 + 6r - 2\,r^2 - \pi r^2$ $= -\,0{,}5\pi r^2 + 6r - 2\,r^2 = f(r)$ $f\,'(r) = -\,\pi r + 6 - 4r$ $0 = -\,\pi r + 6 - 4r \Rightarrow r = \frac{6}{4+\pi}$ $f\,''(r) = -\,\pi - 4 < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $r \approx 0{,}84$ m $f(0{,}84) = 2{,}52$ Definitionsbereich: $0 < r < \frac{6}{\pi+2}$ Randwerte: $f(0) = 0$; $f(\frac{6}{\pi+2}) = 2{,}14$ $\Rightarrow h \approx 0{,}84$ m  Für $r = h \approx 0{,}84$ m ist der Inhalt der Querschnittsfläche maximal, nämlich $2{,}52\ m^2$.	Schüler sollen ein reales Problem in ein mathematisches Optimierungsproblem übertragen und Kenntnisse über Lösungsverfahren bei Extremwertproblemen anwenden	TR als Hilfsmittel für elementare Berechnungen	12
		Gesamtpunktzahl Aufgabe 3:	**20**

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a.2 "Die Brücke" – mit CAS

<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th>Anforderungsbeschreibung</th><th>CAS</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td colspan="4">Teil a) :</td></tr>
<tr><td>Lichte Höhe in cm gemessen: 4,5 cm
(nach rechts abfallender Weg unter dem Träger)

Maßstab: 1,3 cm entsprechen 1,60 m (Frau)
Lichte Höhe real: 5,50 m</td><td>S. bestimmen Entfernungen mit Hilfe eines selbst gewählten Maßstabs</td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="4">Teil b) :</td></tr>
<tr><td>Parabel für $-2{,}2 \leq x \leq 2{,}2$
Ursprung des Koordinatensystems im Scheitelpunkt des Trägers; Betrachtung der Trägerunterkante
<table>
<tr><td>x</td><td>+/- 1</td><td>+/- 1,5</td><td>+/- 2</td><td>+/- 2,2</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>- 0,2</td><td>-0,6</td><td>-1,2</td><td>- 1,5</td></tr>
</table>
$f(x) = -0{,}34x^2 + 0{,}15$

Kreisbogen für $-2{,}2 \leq x \leq 2{,}2$
Daten wie oben
$x^2 + (y + r)^2 = r^2$ mit $r = 2{,}25$</td><td>S. ermitteln in der Abbildung die Koordinaten einiger Punkte

S. stellen die Kreisgleichung auf (evtl. mit Hilfe des Satzes von Pythagoras)</td><td>Grafische Darstellung der Messpunkte und Ermittlung der Regressionskurve

Grafische Darstellung der Messpunkte und des Kreises</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="4">Teil c) :</td></tr>
<tr><td>Der Kreis beschreibt mit Ausnahme des letzten Punktes (2,2/-1,5) den Bogen angemessen, der Scheitelpunkt der Parabel liegt dagegen höher als der Scheitelpunkt des Trägers auf dem Foto.</td><td>S. beurteilen zwei unterschiedliche Modellierungen mit Blick auf reale Messwerte</td><td></td><td>3</td></tr>
</table>

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	Punkte
Berechnung der Kreisbogenlänge: $b = \frac{2\pi r \cdot 2\alpha}{360^o}$ mit r = 2,25 cm und $\alpha = 71^o$, da $\tan\alpha = \frac{2{,}2cm}{2{,}25cm - 1{,}5cm}$ → b = 5,6 cm Schenkellänge auf dem Foto ausgemessen: 3,8 cm + 2,8 cm = 6,6 cm Gesamtlänge des Trägers: 12,2 cm Mit Maßstab umgerechnet (s.o.) 15m (real) Querschnittefläche: 2500 cm^2 Volumen: 3,75 m^3 Gewicht: 9 t	S. wenden elementare Geometriekenntnisse an (Kreisbogenlänge, Winkelsätze im rechtwinkligen Dreieck) und ermitteln Entfernungen mit Hilfe eines selbst gewählten Maßstabs	Elementare Rechenhilfe	5
		Gesamtpunktzahl Aufgabe 3:	**20**