Aufgabe 3b.2: *Bevölkerungswachstum*

In der Frankfurter Rundschau vom 17.1.94 war zu lesen:

Ein Land erstickt an Menschen - Pakistan tut zu wenig gegen die Bevölkerungsexplosion

(...) *Im islamischen Pakistan wächst die Bevölkerung ungehindert. Sie wächst so schnell, dass seit dem vergangenen Jahr Nahrungsmittel eingeführt werden müssen für teure Devisen, die das Land nicht hat. Das Bevölkerungswachstum ist Pakistans Problem Nummer eins. Es liegt derzeit bei 3,2 Prozent im Jahr. Es ist das höchste in Südostasien und wahrscheinlich ist die Zahl auch noch geschönt. Wenn das so weiter geht, wird Pakistan demnächst auf Platz 3 der bevölkerungsreichsten Staaten der Erde liegen (...) Bangladeshs 120 Mio. hat Pakistan mit 124 Mio. schon 1993 überholt ....*

a) Woran erkennt man mathematisch einen exponentiellen Prozess?

b) Bestimme für die Bevölkerungsentwicklung in Pakistan die Wachstumsrate und den Wachstumsfaktor für das Jahr 1993. Berechne die voraussichtliche Bevölkerungszahl für Pakistan im Jahr 2020 - wenn die Entwicklung so weitergeht.

c) Warum sind solche Berechnungen mit einem großen Fragezeichen zu versehen?

d) Berechne die Verdoppelungszeit der pakistanischen Bevölkerung unter den bekannten Bedingungen von 1993.

e) Dem CIA - The World Factbook[1] kann man entnehmen, dass Bangladesh 2004 eine Bevölkerungszahl von 159,196 Mio. Menschen hatte.
Wie groß war die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate im Zeitraum zwischen 1993 und 2004?
Wie erklärt sich der Unterschied zur dort angegebenen Wachstumsrate von 1,98 % für 2004 ?

[1] http://www.odci.gov/cia/publications/factbook/geos/pk.html

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3b.2 "Bevölkerungswachstum"

Skizzierung der Lösung	<u>Anforderungsbeschreibung</u>	TR	CAS
Teil a):			
Der Quotient $\frac{f(t+1)}{f(t)}$ zweier zeitlich aufeinanderfolgender (Mess-)werte ist bei den gegebenen Daten (annähernd) konstant. Dieser konstante Wert ist der Wachstums-(bzw. Zerfalls-)faktor b. Der exponentielle Prozess kann daher durch eine Wachstums- (bzw. Zerfalls-)funktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ beschrieben werden, wobei a der Anfangsbestand zum Zeitpunkt t = 0 ist. [*evtl. Erweiterung je nach unterrichtlicher Behandlung:* Hinweis auf Beschreibung in der Form $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ mit k = lnb (sog. Wachstumskonstante)]	Verständnis der Merkmale exponentieller Prozesse und deren Beschreibung durch Exponentialfunktionen Fähigkeit dies angemessen zu verbalisieren		
Teil b):			
<u>1993:</u> Wachstumsrate: 3,2 % Wachstumsfaktor b = 1,032 $f(t) = 124 \cdot 1{,}032^t$ (Mill. Einwohner) $f(27) \approx 290{,}251$, also wären <u>2020</u> bei unverändertem Wachstumsfaktor ca. 290 251 000 Einwohner in Pakistan zu erwarten.	Textverständnis; elementare Grundkenntnisse zu Exponentialfunktionen		

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil c):			
Seuchen, Katastrophen, politische Maßnahmen zur Geburtenkontrolle, evtl. Kriege beeinträchtigen die Bevölkerungsentwicklung. Daher ist die Annahme eines konstanten Wachstumsfaktors für lange Zeiträume unrealistisch.	Vergleich des mathematischen Modells mit der Realität		
Teil d):			
$f(t) = 2 \cdot f(0) \Leftrightarrow 1{,}032^{t} = 2 \Leftrightarrow t \approx 22{,}01$ (Jahre) <u>oder</u> mittels im Unterricht behandelter Formel: $t_V = \frac{\ln 2}{\ln k}$ mit Wachstumskonstante $k = \ln 1{,}032$.	Berechnung der Verdoppelungszeit	Ermittlung der Verdoppelungszeit	exakte algebraische Ermittlung der Verdoppelungszeit mit CAS
Teil e):			
<u>1993</u>: 124 Mio.; <u>2004</u>: 159,195 Mio. Z.B. liefert der Ansatz $159{,}195 = 124 \cdot b^{11}$ $\Leftrightarrow b = \left(\frac{159{,}195}{124}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 1{,}023$ Die <u>durchschnittliche</u> jährliche Wachstumsrate in diesen 11 Jahren beträgt ca. 2,3 %. Der angegebene Wert 1,98 % für 2004 gibt die aktuelle jährliche Wachstumsrate von 2003 auf 2004 an. Dieser niedrigere Wert lässt eine deutliche Verlangsamung der Bevölkerungsentwicklung (in den letzten Jahren) erkennen.	Lösen einer Potenzgleichung; Vergleich des mathematischen Modells mit der Realität	exakte algebraische Lösung der Potenzgleichung	exakte algebraische Lösung der Potenzgleichung mit CAS