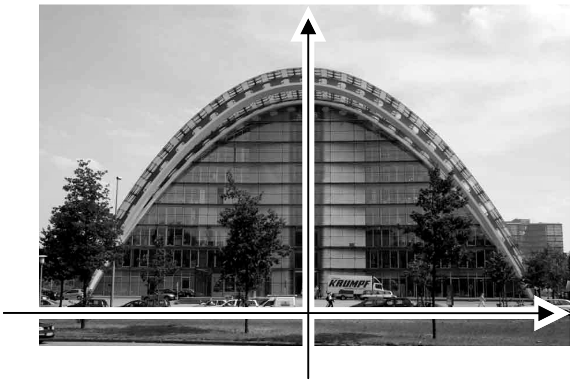
Aufgabe 3

Alternative: Ganzrationale Funktionen

Berliner Bogen



Das Gebäude in den Abbildungen heißt „Berliner Bogen“ und steht in Hamburg. Ein Architekt in Shanghai möchte gerne das gewölbte Glasdach für einen Neubau kopieren. Die Dachkonstruktion soll ähnliche Maße wie das Original haben: Es soll eine Höhe von $36\,\text{m}$ haben und unten doppelt so breit sein wie es hoch ist. Die Länge am Boden (Tiefe des Baus, ohne die überstehenden Teile des Dachs) soll $140\,\text{m}$ betragen.

a) Erklären Sie, inwiefern die Graphen der quadratischen Funktion

f mit $f(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 36$ und der Funktion g vom Grad 4 mit $g(x) = -\frac{1}{36^3}x^4 + 36$

den Bogen modellieren.

Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen mit ihrem CAS und übertragen Sie eine Skizze in Ihre Klausurunterlagen.

Begründen Sie kurz, welche der beiden Funktionen den Bogen besser modelliert.

b) Nehmen Sie an, man würde das Gebäude gemäß der Modellierungen mit den Graphen der Funktionen f oder g bauen. Geben Sie an, welches der beiden Gebäude den größeren vom Glasdach umbauten Raum besäße. Bestimmen Sie, wie viel Kubikmeter der Volumenunterschied beträgt.

c) Dem Architekten gefällt die Form des Graphen von g nicht. Deshalb wählt er einen zweiten Ansatz mit einer allgemeinen Polynomfunktion 4. Grades.

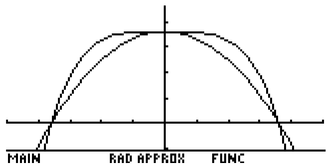
c1) Begründen Sie mit den oben angegebenen Maßen, dass für diese Funktion gilt:

$$f_a(x) = ax^4 - \left(\frac{1}{36} + 36^2 \cdot a\right)x^2 + 36\,.$$

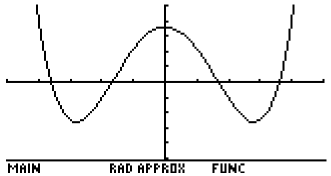
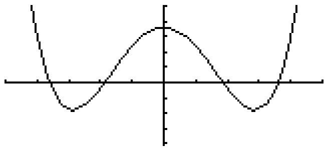
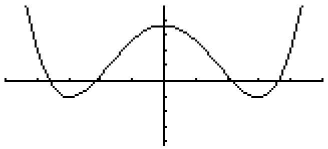
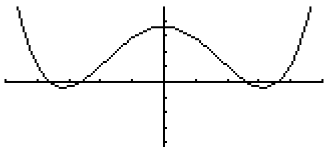
c2) Zeichnen Sie den Graphen für $a = 0{,}0001$ [Fenster: $-50 \le x \le +50$; $-50 \le y \le +50$] und übertragen Sie eine Skizze in Ihre Klausurunterlagen. Begründen Sie, inwiefern dieser Graph zur Modellierung des Bogens nicht geeignet ist.

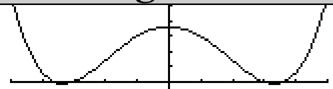
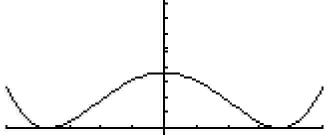
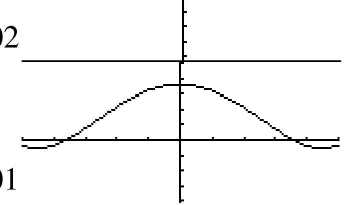
c3) Verkleinern Sie a schrittweise zwischen $0{,}00010$ und $0{,}00001$ und beobachten Sie die Veränderungen am Graphen. Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.
Leiten Sie eine Bedingung her, mit der man berechnen kann, ab welchem a das Problem aus c2) behoben ist.

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3 "Berliner Bogen" – mit CAS – (Ganzrationale Funktion)

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	Punkte
Teil a)			
$f(x)=ax^2+b$, weil die Parabel symmetrisch zur y-Achse ist. $g(x)=ax^4+b$ erfüllt ebenfalls diese Bedingung. $f(0)=g(0)=36$, da das Gebäude 36 m hoch ist. $f(36)=g(36)=0$, weil es doppelt so breit wie hoch ist. $\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{36}x^2+36$ und $g(x)=-\frac{1}{36^3}x^4+36$  Der Graph von g ist im oberen Bereich zu flach, der Graph von f modelliert den Bogen besser.	Schülerinnen und Schüler formulieren aus den gegebenen Maßen Bedingungen an die Funktionen und begründen damit die Funktionsterme oder sie ermitteln aus diesen Bedingungen die Koeffizienten. Sie vergleichen die Graphen zwecks Modellvergleichs.	Zeichnen der Graphen	5

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	Punkte
Teil b)			
Da der Graph von f unterhalb des Graphen von g verläuft, hat das zweite Gebäude den größeren Rauminhalt. $\int_{-36}^{+36} f(x)dx = 1728$; $\int_{-36}^{36} g(x)dx = 2\,073{,}6$ Es ist $(345{,}6 \cdot 140)\,\text{m}^3 = 48\,384\,\text{m}^3$ größer.	Schülerinnen und Schüler berechnen die Querschnittsflächen und die Differenz der Volumina.	Berechnung der bestimmten Integrale Rechenhilfe	3
Teil c)			
c1) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, da die Funktion symmetrisch zur y-Achse ist. $c = 36$, da $f(0) = 36$. Aus $f(36) = 0$ folgt: $36^3 a + 36b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -\left(\frac{1}{36} + 36^2 a\right)$ $f(x) = ax^4 - \left(\frac{1}{36} + 36^2 a\right)x^2 + 36$	Schülerinnen und Schüler formulieren aus den gegebenen Maßen Bedingungen an die Funktion und leiten damit den Funktionsterm her.		3

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	Punkte
c2)  Innerhalb der vorgegebenen Nullstellen von -36 und $+36$ liegen bei diesem Graphen noch zwei weitere Nullstellen.	Schülerinnen und Schüler erläutern, inwiefern der Graph dieser Funktion das Ausgangsproblem nicht modelliert.	Zeichnen des Graphen	3
c3)  $a = 0,00008$  $a = 0,00006$  $a = 0,00004$	Schülerinnen und Schüler variieren den Parameter a und dokumentieren die Veränderungen des Graphen, indem sie ihre Beobachtungen beschreiben und evtl. durch ausgewählte Skizzen veranschaulichen.	Zeichnen der Graphen (je nach verwendetem CAS unterschiedlich: Die Bandbreite reicht vom Zeichnen mehrerer Graphen bis zum Anlegen eines Schiebereglers für a.)	

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	Punkte
 $a = 0,00003$  $a = 0,00002$  $a = 0,00001$ Die beiden äußeren Nullstellen bleiben fest. Die beiden inneren Nullstellen wandern zunächst immer weiter nach außen. Es gibt ein a, bei dem die inneren mit den äußeren Nullstellen zusammenfallen *). (Ab jetzt ist das Problem aus c2) behoben.) Wenn a weiter verkleinert wird, liegen die inneren Nullstellen bei -36 und $+36$, während die beiden anderen Nullstellen jetzt immer weiter nach außen wandern. *) Zur Ergänzung: Die Nullstellenberechnung mit dem CAS liefert als Bedingung: $\frac{1}{6\sqrt{a}} = 36 \Leftrightarrow a = \frac{1}{46656} = \frac{1}{36^3}$	Schülerinnen und Schüler formulieren die Bedingung an die Nullstellen.		4

Gesamt: 18 Punkte