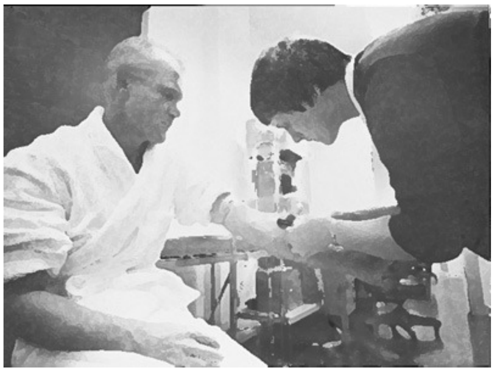
Aufgabe 3b mit CAS

Krankheitsverlauf

In Folge einer schweren Lebensmittelvergiftung liegt Franz schon seit einigen Tagen im Krankenhaus.



Nach Erfahrung der Mediziner lässt sich der Verlauf des Fiebers ungefähr gemäß $T_1(x) = 2x \cdot e^{-0,2x} + 2 \cdot e^{2,91}$ modellieren, wobei x für den Zeitraum in Tagen seit dem Verzehr der verdorbenen Mahlzeit steht.

Bearbeiten Sie die folgenden Probleme mit Mitteln der Differentialrechnung!

a) Zeigen Sie, dass Franz direkt nach dem Genuss des verdorbenen Essens erkrankt, d.h., dass die Temperatur sofort ansteigt.

b) Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Temperatur steigt und den maximalen Wert der Temperatur.

c) Als Franz Krankenbesuch von seinem Freund Fritz erhält, will dieser ihn trösten und erzählt, ihm sei es vor einigen Monaten genauso gegangen. Nach 14 Tagen aber sei er wieder völlig gesund gewesen.
Prüfen Sie diese Aussage unter der Annahme, dass sich das Fieber bei Fritz damals auch gemäß $T_1(x)$ entwickelt hat.

d) Skizzieren Sie den Graphen von T_1 mit Angabe des Zeichenbereichs.

In einem anderen Modell wird der Verlauf des Fiebers bei einer solchen Infektion beschrieben durch die Funktion T_2 mit

$$T_2(x) = \frac{1}{10000}\left(-1,79x^4 + 111x^3 - 2271x^2 + 15894x + 370461\right)$$

e) Skizzieren Sie den Graphen von T_2 und vergleichen Sie mit dem Graphen von T_1:
In welchem Bereich verläuft die Fieberkurve grundsätzlich anders als bei T_1? Erläutern Sie, in welchen Grenzen die Modellierung durch T_2 überhaupt nur sinnvoll ist.

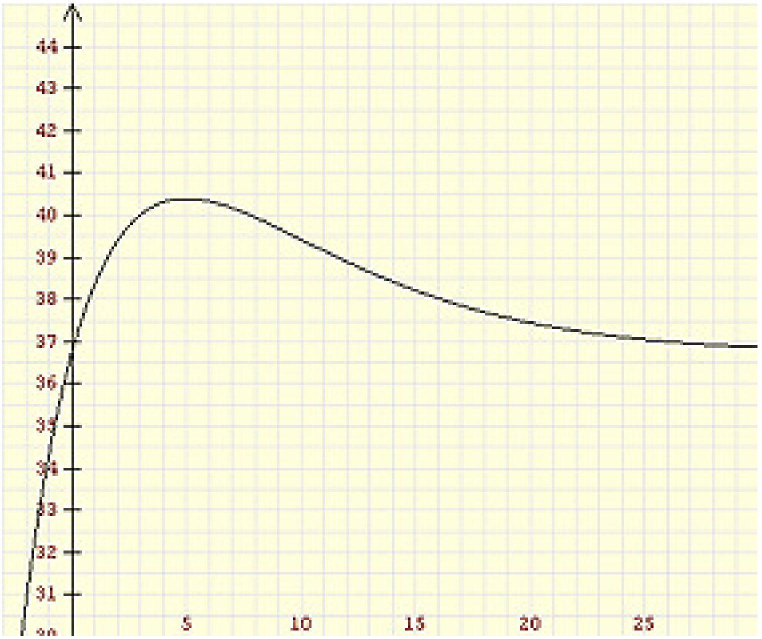
Erwartungshorizont zur Aufgabe 3b "Krankheitsverlauf" – mit CAS

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	
Teil a)			
$T_1'(x) = (-0{,}4x+2)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}2x}$ $T_1'(0) = 2 > 0$, also steigt die Temperatur sofort an.	Die Schülerinnen und Schüler verwenden das vorgegebene mathematische Modell: Sie bestimmen die 1. Ableitung. Sie interpretieren den Wert der 1. Ableitung an der Stelle Null.	Berechnung der Ableitungsfunktion	3
Teil b)			
$T_1'(x) = 0 \Leftrightarrow (-0{,}4x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ Das Fieber steigt bis zum 5. Tag an. $T_1''(x) = (0{,}08x-0{,}8)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}2x}$ und $T_1''(5) < 0$ oder VZW von T_1' bei $x = 5$. T_1 hat den Hochpunkt $(5 \mid 40{,}39)$ Das Fieber steigt bis auf etwa $40{,}4\,°\mathrm{C}$ an.	Sie argumentieren mit dem Monotonieverhalten der Funktion und interpretieren das Ergebnis. Die Schülerinnen und Schüler bestimmen den Hochpunkt der Funktion T_1 und interpretieren das Ergebnis.	Berechnung der 2. Ableitungsfunktion und eventuell weitere Berechnungen	5
Teil c)			
$T_1(14) \approx 38{,}4$ Franz muss länger auf seine Genesung warten, denn nach zwei Wochen hat er noch $38{,}4\,°\mathrm{C}$ Fieber. Der Freund hat sich wohl nicht richtig erinnert oder den Trost zu gut gemeint.	Die Schülerinnen und Schüler prüfen und interpretieren das Ergebnis.	numerische Berechnung	2

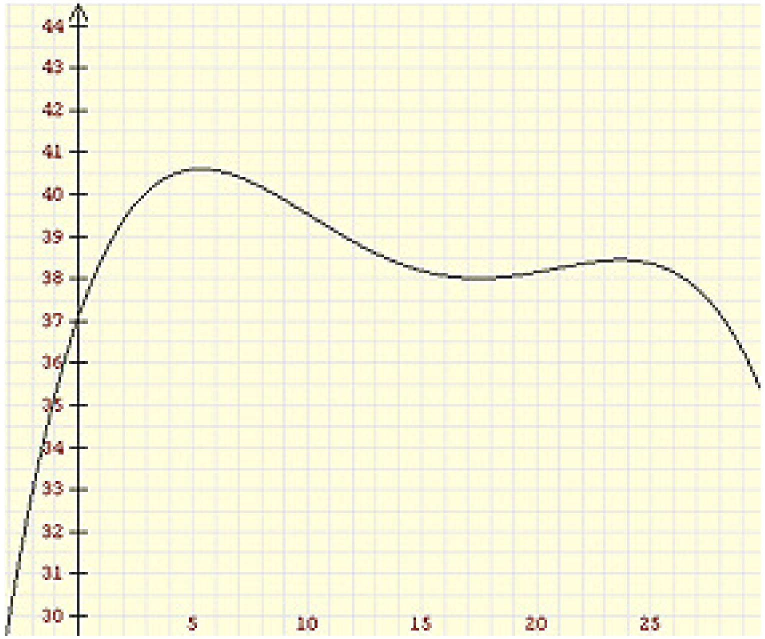
Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	
Teil d)			
Skizze s. unten, ein sinnvoller Zeichenbereich ist: $-2 < x < 30$ und $-30 < y < 45$	Die Schülerinnen und Schüler skizzieren den Graphen von T_1.	CAS zur Zeichnung des Graphen	2
Teil e)			
Skizze s. unten, Zeichenbereich wie in Teil d) Gegenüber T_1 fällt die Temperatur nach Erreichen des Maximums in T_2 nicht einfach wieder ab. Es gibt nach etwa 17 Tagen einen relativen Tiefpunkt, dann steigt aber das Fieber noch einmal an, allerdings nur bis $38{,}3\,°\mathrm{C}$ nach fast 24 Tagen. Nach 28 Tagen ist die Körpertemperatur eines Gesunden zwar wieder erreicht, sie fällt aber weiter ab. Spätestens hier ist das Modell nicht mehr tauglich, da z.B. nach 31 Tagen ein Wert von $33\,°\mathrm{C}$ nicht sinnvoll innerhalb des Kontextes als Körpertemperatur interpretiert werden kann. Der durch T_2 beschriebene Verlauf des Fiebers ist allerhöchstens bis zu 28 Tagen als Modell brauchbar.	Die Schülerinnen und Schüler vergleichen beide Funktionsgraphen und leisten die Interpretationen innerhalb des Kontextes:	CAS zur Zeichnung des Graphen	6

Gesamt: 18 Punkte

Skizzen zu Teil d) und e)



zu $T_1(x)$



zu $T_2(x)$