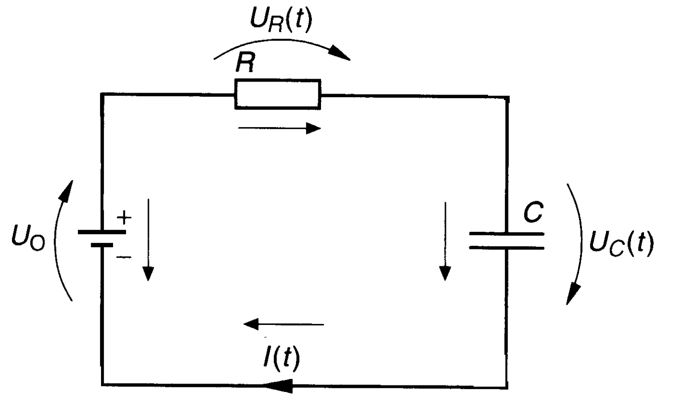
Name: **Datum:**

Aufladen eines Kondensators - Theorie

Die in einem physikalischen Experiment gewonnen Messwerte können nur dann sinnvoll ausgewertet werden, wenn der Typ der mathematischen Funktion bekannt ist, durch die die Abhängigkeiten zwischen den relevanten Größen beschrieben werden kann. Aus prinzipiellen Gründen kann der Typ dieser Funktion aber niemals experimentell, sondern nur durch theoretische Überlegungen bestimmt werden. Diese werden für die Aufladung eines Kondensators im Folgenden durchgeführt.

Durch eine Elektrische Quelle mit der Nennspannung U_0 wird ein Kondensator mit der Kapazität C über einen Widerstand R aufgeladen.



Beachtet man, dass die Spannung U_0 über der Quelle negativ (!) und die Spannungen $U_R(t)$ über dem Widerstand und $U_C(t)$ über dem Kondensator positiv gerechnet werden, gilt nach dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz (Maschenregel) zu jedem Zeitpunkt t des Aufladevorgangs die Gleichung

$$U_0 + U_R(t) + U_C(t) = 0$$

Mit $U_R(t) = R \cdot I(t)$ (OHMsches Gesetz; $I(t)$: Stromstärke im Stromkreis während des Aufladevorgangs) und $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ (Kondensatorgleichung; $Q(t)$: Ladung auf dem Kondensator; C: Kapazität des Kondensators) ergibt sich

$$\Leftrightarrow \quad U_0 + R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Mit $I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ ergibt sich

$$\Leftrightarrow \quad U_0 + R \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \qquad \left| -U_0 \right| : R$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} Q(t) = -\frac{U_0}{R} \quad \textbf{(*)}$$

Dies ist die **inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung für die Ladung Q(t) auf dem Kondensator während des Aufladevorgangs**. Die Größe $\tau = R \cdot C$ heißt **Zeitkonstante**.

Arbeitsaufträge:

1. Ladung auf dem Kondensator

a) *Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass die Funktion* $\boxed{Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$ *mit* $\boxed{Q_0 = -CU_0}$ *die Differentialgleichung (*) erfüllt und damit den zeitlichen Verlauf der Ladung auf dem Kondensator während des Aufladevorgangs beschreibt.*

b) *Erstellen Sie mit einem Funktionsgraphenplotter den Graph der Funktion* $Q(t)$ *für* $R = 100k\Omega = 1{,}0 \cdot 10^5\,\Omega$, $C = 47\mu F = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,F$ *und* $U_0 = -10V$.

c) *Zeigen Sie, dass die Anfangsbedingung* $Q(t = 0) = 0$ *durch die Funktion ebenfalls erfüllt ist.*

d) *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t)$ *und erläutern Sie das Ergebnis physikalisch.*

e) *Zeigen Sie, dass sich nach der Zeit* $t = \tau$ *bereits ca. 63% der endgültigen Ladung* Q_0 *auf dem Kondensator befinden.*

f) *Berechnen Sie die Zeit* t_H*, nach der die Ladung auf dem Kondensator bis zur Hälfte der endgültigen Ladung* Q_0 *angestiegen ist.*

2. Spannung über dem Kondensator

a) *Zeigen Sie mit Hilfe des Zusammenhangs* $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$, *dass die Funktion* $\boxed{U_C(t) = -U_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$ *den zeitlichen Verlauf der Spannung über dem Kondensator während des Aufladevorgangs beschreibt.*

b) *Erstellen Sie mit einem Funktionsgraphenplotter den Graph der Funktion* $U_C(t)$ *für* $R = 100k\Omega = 1{,}0 \cdot 10^5\,\Omega$, $C = 47\mu F = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,F$ *und* $U_0 = -10V$.

c) *Berechnen Sie die Spannung* $U_C(t = 0)$ *über dem Kondensator zum Zeitpunkt* $t = 0$.

d) *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{t \to +\infty} U_C(t)$ *und erläutern Sie das Ergebnis physikalisch.*

e) *Zeigen Sie, dass nach der Zeit* $t = \tau$ *die Spannung über dem Kondensator bereits ca. 63% der endgültigen Spannung* $-U_0$ *beträgt.*

f) *Berechnen Sie die Zeit* t_H*, nach der die Spannung über dem Kondensator bis zur Hälfte der endgültigen Spannung* $-U_0$ *angestiegen ist.*

3. Stromstärke in der Schaltung

a) *Zeigen Sie mit Hilfe des Zusammenhangs* $I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$**,** *dass die Funktion* $\boxed{I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$ *mit* $\boxed{I_0 = -U_0 / R}$ *den zeitlichen Verlauf der Stromstärke in der Schaltung während des Aufladevorgangs beschreibt.*

b) *Erstellen Sie mit einem Funktionsgraphenplotter den Graph der Funktion* $I(t)$ *für* $R = 100k\Omega = 1{,}0 \cdot 10^5\,\Omega$, $C = 47\mu F = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,F$ *und* $U_0 = -10V$.

c) *Berechnen Sie die Stromstärke* $I(t = 0)$ *in der Schaltung zum Zeitpunkt* $t = 0$.

d) *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$ *und erläutern Sie das Ergebnis physikalisch.*

e) *Zeigen Sie, dass nach der Zeit* $t = \tau$ *die Stromstärke in der Schaltung nur noch ca. 37% der ursprünglichen Stromstärke* I_0 *beträgt.*

f) *Berechnen Sie die Zeit* t_H*, nach der die Stromstärke in der Schaltung bis zur Hälfte der ursprünglichen Stromstärke* I_0 *abgefallen ist.*

4. Spannung über dem Widerstand

a) *Zeigen Sie mit Hilfe des Zusammenhangs* $U_R(t) = R \cdot I(t)$**,** *dass die Funktion* $\boxed{U_R(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$ *den zeitlichen Verlauf der Spannung über dem Widerstand während des Aufladevorgangs beschreibt.*

b) *Erstellen Sie mit einem Funktionsgraphenplotter den Graph der Funktion* $U_R(t)$ *für* $R = 100k\Omega = 1{,}0 \cdot 10^5\,\Omega$, $C = 47\mu F = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,F$ *und* $U_0 = -10V$.

c) *Berechnen Sie die Spannung* $U_R(t = 0)$ *über dem Widerstand zum Zeitpunkt* $t = 0$.

d) *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{t \to +\infty} U_R(t)$ *und erläutern Sie das Ergebnis physikalisch.*

e) *Zeigen Sie, dass nach der Zeit* $t = \tau$ *die Spannung über dem Widerstand nur noch ca. 37% der ursprünglichen Spannung* $-U_0$ *beträgt.*

f) *Berechnen Sie die Zeit* t_H*, nach der die Spannung über dem Widerstand bis zur Hälfte der ursprünglichen Spannung* $-U_0$ *abgefallen ist.*