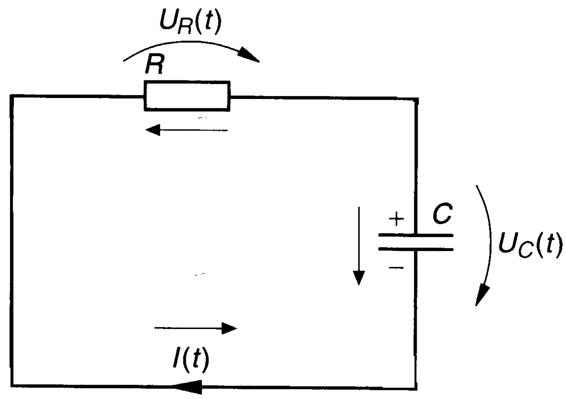
Name: **Datum:**

Entladen eines Kondensators - Theorie

Die in einem physikalischen Experiment gewonnen Messwerte können nur dann sinnvoll ausgewertet werden, wenn der Typ der mathematischen Funktion bekannt ist, durch die die Abhängigkeiten zwischen den relevanten Größen beschrieben werden kann. Aus prinzipiellen Gründen kann der Typ dieser Funktion aber niemals experimentell, sondern nur durch theoretische Überlegungen bestimmt werden. Diese werden für die Entladung eines Kondensators im Folgenden durchgeführt.

Ein durch eine Spannung U_0 mit der Ladung Q_0 aufgeladener Kondensator mit der Kapazität C wird über einen Widerstand R entladen.



Beachtet man, dass die Spannung $U_C(t)$ über dem Kondensator positiv und die Spannung $U_R(t)$ über dem Widerstand wegen der gegenüber dem Aufladevorgang entgegengesetzten Stromrichtung jetzt negativ (!) gerechnet wird, gilt nach dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz (Maschenregel) zu jedem Zeitpunkt t des Entladevorgangs die Gleichung

$$U_R(t) + U_C(t) = 0$$

Mit $U_R(t) = R \cdot I(t)$ (OHMsches Gesetz; $I(t)$: Stromstärke im Stromkreis während des Entladevorgangs) und $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ (Kondensatorgleichung; $Q(t)$: Ladung auf dem Kondensator während des Entladevorgangs) ergibt sich

$$\Leftrightarrow \quad R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Mit $I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ ergibt sich

$$\Leftrightarrow \quad R \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \qquad \Big| :R$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} Q(t) = 0 \qquad \textbf{(*)}$$

Dies ist die **homogene Differentialgleichung 1.Ordnung für die Ladung Q(t) auf dem Kondensator während des Entladevorgangs**. Die Größe $\tau = R \cdot C$ heißt **<u>Zeitkonstante</u>**.

☞ Arbeitsaufträge:

1. Ladung auf dem Kondensator

- **a)** *Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass die Funktion* $\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$ *mit* $\boxed{Q_0 = -CU_0}$ *die Differentialgleichung (*) erfüllt und damit den zeitlichen Verlauf der Ladung auf dem Kondensator während des Entladevorgangs beschreibt.*
- **b)** *Erstellen Sie mit einem Funktionenplotter den Graph der Funktion* $Q(t)$ *für* $R = 100\,k\Omega = 1{,}0 \cdot 10^5\,\Omega$, $C = 47\,\mu F = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,F$ *und* $U_0 = -10\,V$.
- **c)** *Zeigen Sie, dass die Anfangsbedingung* $Q(t=0) = Q_0$ *durch die Funktion ebenfalls erfüllt ist.*
- **d)** *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t)$ *und erläutern Sie das Ergebnis physikalisch.*
- **e)** *Zeigen Sie, dass sich nach der Zeit* $t = \tau$ *nur noch ca. 37% der ursprünglichen Ladung* Q_0 *auf dem Kondensator befinden.*

f) *Berechnen Sie die Zeit* t_H*, nach der die Ladung auf dem Kondensator auf die Hälfte der ursprünglichen Ladung* Q_0 *abgefallen ist.*

2. Spannung über dem Kondensator

a) *Zeigen Sie mit Hilfe des Zusammenhangs* $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$*, dass die Funktion* $\boxed{U_C(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$ *den zeitlichen Verlauf der Spannung über dem Kondensator während des Entladevorgangs beschreibt.*

b) *Erstellen Sie mit einem Funktionenplotter den Graph der Funktion* $U_C(t)$ *für* $R = 100k\Omega = 1{,}0 \cdot 10^5\,\Omega$, $C = 47\mu F = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,F$ *und* $U_0 = -10V$.

c) *Berechnen Sie die Spannung* $U_C(t=0)$ *über dem Kondensator zum Zeitpunkt* $t = 0$.

d) *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{t \to +\infty} U_C(t)$ *und erläutern Sie das Ergebnis physikalisch.*

e) *Zeigen Sie, dass nach der Zeit* $t = \tau$ *die Spannung über dem Kondensator nur noch ca. 37% der ursprünglichen Spannung* $-U_0$ *beträgt.*

f) *Berechnen Sie die Zeit* t_H*, nach der die Spannung über dem Kondensator auf die Hälfte der ursprünglichen Spannung* $-U_0$ *abgefallen ist.*

3. Stromstärke in der Schaltung

a) *Zeigen Sie mit Hilfe des Zusammenhangs* $I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$*, dass die Funktion* $\boxed{I(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$ *mit* $\boxed{I_0 = \frac{-U_0}{R}}$ *den zeitlichen Verlauf der Stromstärke in der Schaltung während des Entladevorgangs beschreibt.*

b) *Erstellen Sie mit einem Funktionenplotter den Graph der Funktion* $I(t)$ *für* $R = 100k\Omega = 1{,}0 \cdot 10^5\,\Omega$, $C = 47\mu F = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,F$ *und* $U_0 = -10V$.

c) *Berechnen Sie die Stromstärke* $I(t=0)$ *in der Schaltung zum Zeitpunkt* $t = 0$.

d) *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$ *und erläutern Sie das Ergebnis physikalisch.*

e) *Zeigen Sie, dass nach der Zeit* $t = \tau$ *die Stromstärke in der Schaltung nur noch ca. 37% der ursprünglichen Stromstärke* $-I_0$ *beträgt.*

f) *Berechnen Sie die Zeit* t_H*, nach der die Stromstärke in der Schaltung auf die Hälfte der ursprünglichen Stromstärke* $-I_0$ *abgefallen ist.*

4. Spannung über dem Widerstand

a) *Zeigen Sie mit Hilfe des Zusammenhangs* $U_R(t) = R \cdot I(t)$*, dass die Funktion* $\boxed{U_R(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$ *den zeitlichen Verlauf der Spannung über dem Widerstand während des Entladevorgangs beschreibt.*

b) *Erstellen Sie mit einem Funktionenplotter den Graph der Funktion* $U_R(t)$ *für* $R = 100k\Omega = 1{,}0 \cdot 10^5\,\Omega$, $C = 47\mu F = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,F$ *und* $U_0 = -10V$.

c) *Berechnen Sie die Spannung* $U_R(t=0)$ *über dem Widerstand zum Zeitpunkt* $t = 0$.

d) *Berechnen Sie den Grenzwert* $\lim\limits_{t \to +\infty} U_R(t)$ *und erläutern Sie das Ergebnis physikalisch.*

e) *Zeigen Sie, dass nach der Zeit* $t = \tau$ *die Spannung über dem Widerstand nur noch ca. 37% der ursprünglichen Spannung* U_0 *beträgt.*

f) *Berechnen Sie die Zeit* t_H*, nach der die Spannung über dem Widerstand auf die Hälfte der ursprünglichen Spannung* U_0 *abgefallen ist.*