Name: **Datum:**

Stationenlernen Kondensator T2 - Mathematische Grundlagen

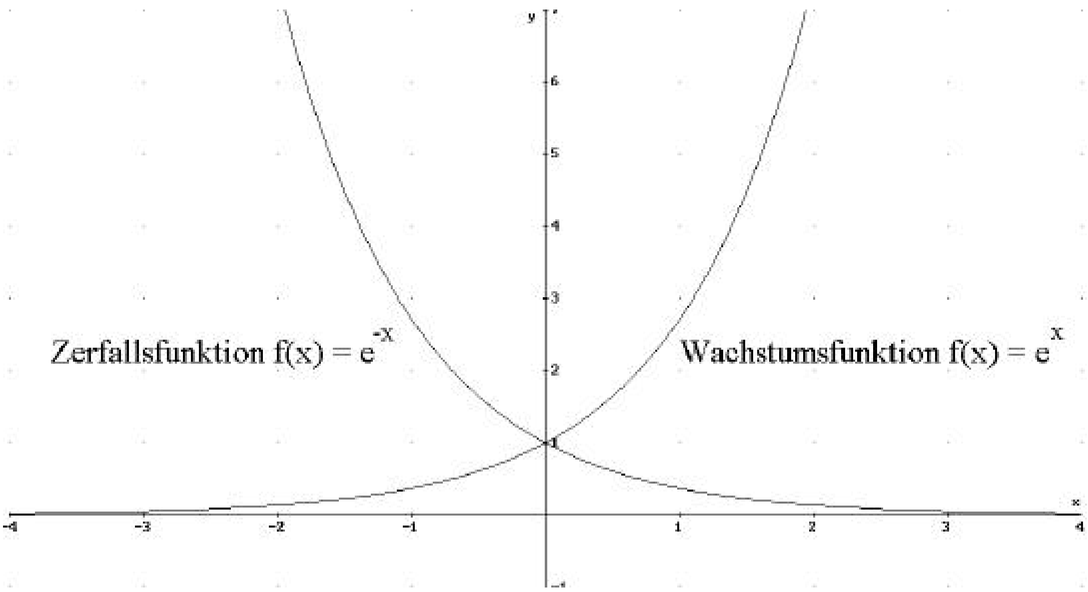
1. Die EULERsche Zahl e

Die EULERsche Zahl e ist die für die Naturwissenschaften wichtigste Zahl, da sie bei fast allen Wachstums- und Zerfallsprozessen zu finden ist. Sie ist der Grenzwert der Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, d.h.

$e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und hat den Näherungswert $e = 2{,}71828...$

2. Die natürlichen Exponentialfunktionen

Die Exponentialfunktionen mit der Basis e heißen natürliche Exponentialfunktionen. Die Graphen der beiden wichtigsten natürlichen Exponentialfunktionen $f(x) = e^x$ und $f(x) = e^{-x}$ haben folgendes Aussehen:



Aus den Graphen sind auch die beiden wichtigen Grenzwerte ersichtlich:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ und } \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 .$$

3. Die Ableitungen der natürlichen Exponentialfunktionen

Die Exponentialfunktion e^x hat als einzige Funktion die Eigenschaft, dass, dass sie sich selbst als Ableitungsfunktion hat, d.h.

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Zusammen mit der Kettenregel ergibt sich weiter

$$\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x},\ \left(e^{k\cdot x}\right)' = k\cdot e^{k\cdot x} \text{ und } \left(e^{-k\cdot x}\right)' = -k\cdot e^{-k\cdot x}$$

4. Die Stammfunktionen der natürlichen Exponentialfunktionen

Die Exponentialfunktion e^x hat als einzige Funktion die Eigenschaft, dass, dass sie sich selbst als Stammfunktion hat, d.h.

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Zusammen mit der Substitutionsregel ergibt sich weiter

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C,\ \int e^{k\cdot x} dx = \frac{1}{k} e^{k\cdot x} + C \text{ und } \int e^{-k\cdot x} dx = -\frac{1}{k} e^{-k\cdot x} + C$$

5. Der Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktionen

Die Umkehrfunktion zur natürlichen Exponentialfunktion e^x heißt natürlicher Logarithmus $\ln(x)$.

Das Auflösen der Potenzgleichung $y = e^x$ nach dem Exponenten x geschieht somit durch folgende Äquivalenz:

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

Entsprechend gilt:

$$y = e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln(y),\ y = e^{k\cdot x} \Leftrightarrow k\cdot x = \ln(y) \text{ und } y = e^{-k\cdot x} \Leftrightarrow -k\cdot x = \ln(y)$$

6. Rechengesetze für Potenzen und Logarithmen

a) Potenzgesetze

Es gilt: $e^0 = 1$, $e^1 = e$ und $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert oder dividiert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten addiert bzw. subtrahiert:

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b},\ e^a : e^b = e^{a-b}$$

Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten multipliziert:

$$(e^a)^b = e^{a\cdot b}$$

b) Logarithmengesetze

Es gilt: $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ und $\ln(\frac{1}{e}) = -1$

Logarithmen zur gleichen Basis werden addiert oder subtrahiert, indem man die Basis beibehält und die Numeri multipliziert oder dividiert:

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a\cdot b),\ \ln(a) - \ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$$

Ein Logarithmus wird mit einer Zahl multipliziert, indem man die Basis beibehält und den Numerus potenziert:

$$b\cdot \ln(a) = \ln(a^b)$$