Der schiefe Wurf

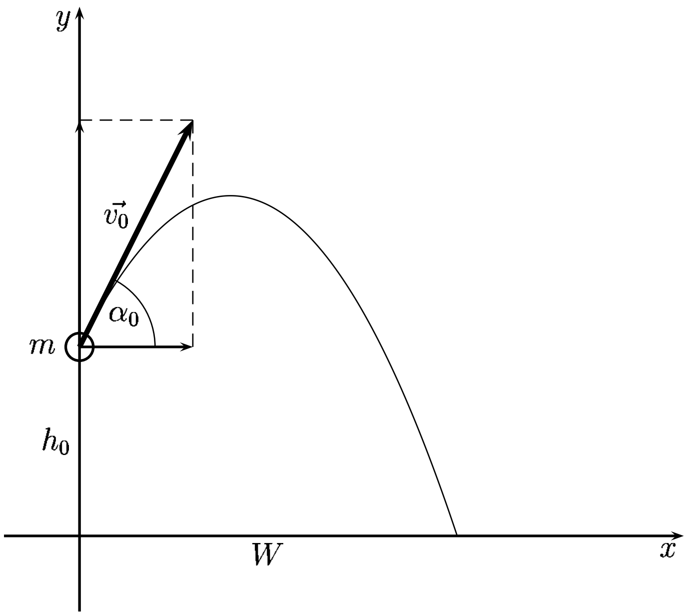
Walter Fendt

10. April 2003

Ein Körper der Masse m wird in der Höhe h_0 über dem Boden mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v_0}$ geworfen, und zwar unter dem Winkel α_0 gegenüber der Waagrechten. Die Bewegung des Körpers wird beeinflusst von der Gewichtskraft – entsprechend der Fallbeschleunigung g. Die Luftwiderstandskraft soll vernachlässigt werden.

1 Koordinaten

Zur Beschreibung der Wurfbewegung wird ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, dessen Ursprung sich senkrecht unter dem Ausgangspunkt in Bodenhöhe befindet. Der Abwurf erfolgt zur Zeit $t = 0$.



In den Berechnungen werden folgende Größen verwendet:

$\vec{r}$	Ortsvektor
x	waagrechte Koordinate
y	senkrechte Koordinate
t	Zeit
g	Fallbeschleunigung
$\vec{v_0}$	Anfangsgeschwindigkeit (Vektor)
v_0	Anfangsgeschwindigkeit (Betrag)
α_0	Abwurfwinkel (gegenüber der Waagrechten)
h_0	Ausgangshöhe
T	Wurfdauer
W	Wurfweite
h_{max}	maximale Höhe über dem Boden
$\vec{v}$	Geschwindigkeit (Vektor)
v	Geschwindigkeit (Betrag)
v_x	waagrechte Geschwindigkeitskomponente
v_y	senkrechte Geschwindigkeitskomponente
α	Winkel der Bewegungsrichtung gegenüber der Waagrechten
m	Masse
$\vec{a}$	Beschleunigung (Vektor)
a	Beschleunigung (Betrag)
$\vec{F}$	Kraft (Vektor)
F	Kraft (Betrag)
E_{kin}	kinetische Energie (Bewegungsenergie)
E_{pot}	potenzielle Energie (Lageenergie)
E	Gesamtenergie

In waagrechter Richtung (x-Richtung) bewegt sich der Körper mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 \cos \alpha_0$:

x-Koordinate:

$$x = v_0 t \cos \alpha_0 \tag{1}$$

In senkrechter Richtung (y-Richtung) erfolgt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Ausgangshöhe ist h_0, die Anfangsgeschwindigkeit in y-Richtung beträgt $v_0 \sin \alpha_0$ (bei positivem α_0 nach oben, also in positive y-Richtung gerichtet). Da die (Fall-)Beschleunigung den Betrag g hat und nach unten gerichtet ist (in negative y-Richtung), muss für die Beschleunigung in y-Richtung der Wert $-g$ eingesetzt werden.

y-Koordinate:

$$y = h_0 + v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{g}{2}t^2 \qquad (2)$$

Als nächstes soll die Gleichung der Wurfbahn aufgestellt werden. Man löst dazu (1) nach t auf und setzt das Ergebnis in (2) ein:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0} \\ y &= h_0 + v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0} \cdot \sin\alpha_0 - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}\right)^2 \\ &= h_0 + x\tan\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} \end{aligned}$$

Gleichung der Wurfbahn:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2 + (\tan\alpha_0)x + h_0 \qquad (3)$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen, dass die Wurfbahn Teil einer nach unten geöffneten Parabel ist.

Um die Dauer T des Wurfs zu bestimmen, setzt man in Gleichung (2) die Höhe y gleich 0:

$$\begin{aligned} h_0 + v_0 T \sin\alpha_0 - \frac{g}{2}T^2 &= 0 \quad |\cdot 2 \\ -gT^2 + 2v_0 T \sin\alpha_0 + 2h_0 &= 0 \end{aligned}$$

Verwendung der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{-2v_0 \sin\alpha_0 \pm \sqrt{(2v_0 \sin\alpha_0)^2 - 4\cdot(-g)\cdot 2h_0}}{2\cdot(-g)} \\ &= \frac{-2v_0 \sin\alpha_0 \pm \sqrt{4v_0^2 \sin^2\alpha_0 + 8gh_0}}{-2g} \\ &= \frac{v_0 \sin\alpha_0 \mp \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha_0 + 2gh_0}}{g} \end{aligned}$$

Das Minuszeichen vor der Wurzel würde zu einem negativen Wert von T führen. Daher muss das Pluszeichen richtig sein.

Wurfdauer:

$$T = \frac{v_0 \sin \alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gh_0}}{g} \tag{4}$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in Gleichung (1) erhält man nun problemlos die Wurfweite:

$$W = v_0 \cos \alpha_0 \cdot T$$

Wurfweite:

$$W = \frac{v_0 \cos \alpha_0 \left(v_0 \sin \alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gh_0} \right)}{g} \tag{5}$$

Als nächstes soll die maximale Höhe errechnet werden. Dazu ist die zeitliche Ableitung von (2) gleich 0 zu setzen.

$$\begin{aligned} v_0 \sin \alpha_0 - gt &= 0 \\ t &= \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \end{aligned}$$

Dieser Wert für t (der Zeitpunkt der maximalen Höhe) kann nun in (2) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} h_{max} &= h_0 + v_0 \cdot \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \cdot \sin \alpha_0 - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \right)^2 \\ &= h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} \end{aligned}$$

Maximale Höhe über dem Boden:

$$h_{max} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} \tag{6}$$

2 Geschwindigkeit

Die beiden Komponenten der Geschwindigkeit, v_x (waagrecht) und v_y (senkrecht) erhält man durch Differenziation von (1) beziehungsweise (2) nach der Zeit t.

Waagrechte Komponente der Geschwindigkeit:

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 \tag{7}$$

Senkrechte Komponente der Geschwindigkeit:

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt \tag{8}$$

Der Geschwindigkeitsbetrag v ergibt sich nun aus dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ &= (v_0 \cos \alpha_0)^2 + (v_0 \sin \alpha_0 - gt)^2 \\ &= v_0^2 \cos^2 \alpha_0 + v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2 \\ &= v_0^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0)}_{=1} - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2 \end{aligned}$$

Betrag der Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2} \tag{9}$$

Kombiniert man die Beziehungen (7) und (8) miteinander, so erhält man den Winkel α, den die momentane Bewegungsrichtung mit der Waagrechten einschließt:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Winkel zwischen Bewegungsrichtung und Waagrechter:

$$\tan\alpha = \frac{v_0 \sin\alpha_0 - gt}{v_0 \cos\alpha_0} \qquad (10)$$

3 Beschleunigung

Über die Beschleunigung gibt es nicht viel zu sagen. Der Beschleunigungsvektor hat zu jedem Zeitpunkt den Betrag g (Fallbeschleunigung) und ist nach unten gerichtet. Man beachte, dass die Richtung des Beschleunigungsvektors nicht mit der Bewegungsrichtung übereinstimmt!

4 Kraft

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom (Kraftgesetz) besteht zwischen der Beschleunigung $\vec{a}$ und der Kraft $\vec{F}$ der Zusammenhang $\vec{F} = m\vec{a}$, wobei m für die Masse steht. Bei der Kraft $\vec{F}$, die demnach den Betrag mg hat, handelt es sich natürlich um die Gewichtskraft (Gravitationskraft). Der Kraftvektor ist wie der Beschleunigungsvektor nach unten gerichtet.

5 Energie

Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) ergibt sich aus $E_{kin} = \frac{m}{2}v^2$, wobei (9) den Wert von v liefert.

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha_0 + g^2t^2\right) \qquad (11)$$

Die potenzielle Energie (Lageenergie, hier genauer: Höhenenergie) sei so festgelegt, dass sie am Boden den Wert 0 hat. Es gilt $E_{pot} = mgy$ und somit gemäß (2):

Potenzielle Energie:

$$E_{pot} = mg\left(h_0 + v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{g}{2}t^2\right) \tag{12}$$

Damit lässt sich die Gesamtenergie angeben:

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{m}{2}\left(v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha_0 + g^2t^2\right) + mg\left(h_0 + v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{g}{2}t^2\right) \\ &= \frac{m}{2}v_0^2 - mv_0 gt\sin\alpha_0 + \frac{m}{2}g^2t^2 + mgh_0 + mgv_0 t\sin\alpha_0 - \frac{m}{2}g^2t^2 \\ &= \frac{m}{2}v_0^2 + mgh_0 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hängt – in Übereinstimmung mit dem Energieerhaltungssatz – nicht von der Zeit t ab.

Gesamtenergie:

$$E = \frac{m}{2}v_0^2 + mgh_0 \tag{13}$$