Nullstellen und gemeinsame Punkte mit dem GTR

Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen

Wir bestimmen als Beispiel die Nullstellen der Funktion *f*: $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}2x$.

Zeichne das Schaubild der Funktion mit $\boxed{\texttt{GRAPH}}$ oder mit $\boxed{\texttt{TRACE}}$. Achte darauf, dass der *x*-Bereich genügend groß ist, so dass alle gemeinsamen Punkte des Schaubilds mit der *x*-Achse dargestellt werden. Bei den meisten Aufgaben ist `Xmin=`-10 und `Xmax=`10 ausreichend.
Stelle zunächst `Ymin=`-10 und `Ymax=`10 ein: Das Schaubild „verschmiert" mit der x-Achse.
Verkleinere den *y*-Bereich, beispielsweise `Ymin=`-1 und `Ymax=`1.
Wir berechnen zunächst die am weitesten links liegende Nullstelle. Rufe im `CALCULATE`-Menü den Menüpunkt `2:zero` auf. Es erscheint die Eingabeaufforderung „Left Bound?". Bringe den Cursor mit den Pfeiltasten an eine Stelle links von der gesuchten Nullstelle, oder gib eine Zahl ein, die kleiner als die gesuchte Nullstelle ist, und drücke die `ENTER`-Taste; dabei springt der Cursor auf den Punkt des Schaubilds mit diesem *x*-Wert. Jetzt erscheint die Eingabeaufforderung „Right Bound?". Bringe den Cursor mit den Pfeiltasten an eine Stelle rechts von der gesuchten Nullstelle, aber links von der nächsten Nullstelle, oder gib einen *x*-Wert ein, der zwischen der gesuchten Nullstelle und der nächsten Nullstelle liegt, und drücke die `ENTER`-Taste; wieder springt der Cursor auf den Punkt des Schaubilds mit diesem *x*-Wert.
Nun erscheint die Eingabeaufforderung „Guess?", und man kann einen Schätzwert für die Nullstelle eingeben. Voreingestellt ist der *x*-Wert der momentanen Cursorposition, also die rechte Grenze des Bereichs, in dem die Nullstelle gesucht wird. Man kann einen anderen Schätzwert eingeben, indem man den Cursor mit den Pfeiltasten auf einen Punkt mit dem gewünschten *x*-Wert bringt, oder indem man die gewünschte Zahl eingibt und anschließend die `ENTER`-Taste drückt. Enthält der ausgewählte Bereich nur *eine* Nullstelle, dann spielt der Schätzwert keine Rolle; enthält der Bereich dagegen mehrere Nullstellen, dann muss der Schätzwert in der Nähe der gesuchten Nullstelle liegen.
Der Cursor springt auf den im angegebenen Bereich liegenden gemeinsamen Punkt des Schaubilds mit der *x*-Achse, und man erhält den Näherungswert $X = -1.414214$ und den Funktionswert $Y = 0$.
Bestimme auch die beiden anderen Nullstellen.
Ohne GTR findet man die Nullstellen ganz einfach durch Ausklammern von $0{,}1x$, denn $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}2x = 0{,}1x\left(x^2 - 2\right)$ hat offensichtlich die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$ und $x_3 = \sqrt{2}$.

Beispiel: Versuche, die Nullstelle der Funktion *f*: $f(x) = x^2$ zu bestimmen.

Der GTR findet die offensichtliche Nullstelle $x = 0$ nicht! Vielmehr erscheint „NO SIGN CHNG" (engl. *no sign chang*e, d.h. kein Vorzeichenwechsel). In einem solchen Fall ändert man die Fenstervariablen (eventuell mehrfach) so, dass der fragliche Bereich um die Nullstelle möglichst groß gezeichnet wird; dann zeichnet man das Schaubild mit $\boxed{\texttt{TRACE}}$ und versucht, den Cursor möglichst genau auf den gemeinsamen Punkt mit der *x*-Achse zu bringen.

Beispiel: Versuche, die Nullstellen der Funktion *f*: $f(x) = x^3 - 0{,}1x^2$ zu bestimmen.

Der GTR findet nur die einfache Nullstelle $x = 0{,}1$, aber nicht die doppelte Nullstelle $x = 0$.
Ändere die Fenstervariablen so lange, bis beide Nullstellen klar zu erkennen sind.
Ohne GTR findet man die Nullstellen ganz einfach durch Ausklammern von x^2, denn
$f(x) = x^3 - 0{,}1x^2 = x^2(x - 0{,}1)$ hat offensichtlich die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0{,}1$.

Näherungsweise Bestimmung gemeinsamer Punkte

Beispiel: Bestimme die gemeinsamen Punkte der Schaubilder der Funktionen *f*: $f(x) = x^2$ und *g*: $g(x) = x + 1$.

Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` und die Funktion *g* als Funktion `Y2` ein. Zeichne das Schaubild von `Y1` normal und das Schaubild von `Y2` dick, so dass man die Schaubilder unterscheiden kann. Achte darauf, dass der *x*-Bereich und der *y*-Bereich genügend groß sind, so dass alle gemeinsamen Punkte der Schaubilder zu sehen sind.

Rufe im `CALCULATE`-Menü den Menüpunkt `5:intersect` auf. Es erscheint die Eingabeaufforderung „First curve?“. Links oben erscheint „$Y1 = X^2$, und der Cursor befindet sich auf dem zugehörigen Schaubild. Drücke die `ENTER`-Taste. Jetzt erscheint die Eingabeaufforderung „Second curve?“; links oben erscheint „$Y2 = X + 1$“, und der Cursor befindet sich auf dem zugehörigen Schaubild. Drücke die `ENTER`-Taste. Es erscheint die Eingabeaufforderung „Guess?“. Bringe den Cursor in die Nähe des linken Schnittpunkts und drücke die `ENTER`-Taste. Der Cursor springt auf den Schnittpunkt, und man erhält die Näherungswerte $X = -.618034$ und $Y = .38196601$.

Bestimme auch den anderen Schnittpunkt.

Aufgabe:

Berechne mithilfe des GTR die exakten (!) Werte der Nullstellen der Funktion *f*:

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 10x + 3.$$

Hinweis: Die Funktion hat eine rationale Nullstelle.

Lösung:

Nullstellen von *f* mit dem GTR: $x_1 \approx -2{,}41$; $x_2 \approx 0{,}41$; $x_3 \approx 0{,}75$

Mögliche rationale Nullstellen: $\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{3}{4}$

Also rationale Nullstelle $x_1 = \frac{3}{4}$.

Polynomdivision: $\left(4x^3 + 5x^2 - 10x + 3\right) : \left(x - \frac{3}{4}\right) = 4x^2 + 8x - 4$

Die Lösungen der Gleichung $4x^2 + 8x - 4 = 0$ bzw. $x^2 + 2x - 1 = 0$ erhält man mit der Lösungsformel:

$x_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}41$; $x_3 = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}41$.