Integrale mit dem GTR

Integrale

Mit dem Befehl $\int f(x)\,dx$ im `Calculate`-Menü kann man im `GRAPH`- oder `TRACE`-Bildschirm ein Integral berechnen. Wir berechnen als Beispiel das Integral $\int_1^5 x^2\,dx$:

Gib den Integranden x^2 als Funktion `Y1` ein. Stelle die Fenstervariablen geeignet ein; in unserem Beispiel bietet sich `Xmin` = 0 und `Xmax` = 6 an. Zeichne das Schaubild mit `ZoomFit`.

Bemerkung: Der GTR kann ein Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nur berechnen, wenn `Xmin` kleiner oder gleich *a* und `Xmax` größer oder gleich *b* ist.

Rufe im `Calculate`-Menü den Befehl `7:` $\int f(x)\,dx$ auf. Es erscheint die Eingabeaufforderung „Lower Limit?“. Gib die untere Grenze 1 ein und drücke die `ENTER`-Taste. Nun erscheint die Eingabeaufforderung „Upper Limit?“. Gib die obere Grenze 5 ein und drücke die `ENTER`-Taste. Dann wird die Fläche schraffiert, die vom Schaubild von *f*, der *x*-Achse sowie den Geraden $x = 1$ und $x = 5$ begrenzt wird, und es wird ein Näherungswert für $\int_1^5 x^2\,dx$ ausgegeben.

Diesen Näherungswert kann man (wie üblich) mit [MATH] [ENTER] [ENTER] in einen Bruch umwandeln.

Die Schraffur der Fläche löscht man mit dem Befehl `ClrDraw` (von *Cl*e*ar Draw*, also lösche Zeichnung): Rufe im `DRAW`-Menü den Befehl `1:ClrDraw` auf.

Integralfunktionen

Mit dem Befehl `fnInt` (von *Fun*ktions*int*egral, d. h. Integralfunktion) im `MATH`-Menü kann man das Schaubild einer Integralfunktion zeichnen und eine Wertetabelle der Integralfunktion erstellen. Man kann allerdings *nicht* den Funktionsterm der Integralfunktion bestimmen.

Bemerkung: Eine Integralfunktion ist bekanntlich eine Stammfunktion der ursprünglichen Funktion. Man kann mit dem GTR also das Schaubild einer Stammfunktion zeichnen und eine Wertetabelle erstellen, aber nicht die Funktionsgleichung einer Stammfunktion bestimmen.

Wir zeichnen als Beispiel die Integralfunktion der Funktion *f*: $f(x) = x^2$ zur unteren Grenze 1, also die Funktion I_1: $I_1(x) = \int_1^x x^2\,dx$.

Bemerkung: Eigentlich darf man bei einem Integral für die Integrationsvariable nicht denselben Buchstaben wie für die obere Grenze verwenden. Wir tun dies hier trotzdem, weil der GTR diese Notation verwendet.

Gib den Integranden x^2 als Funktion `Y1` ein. Gib als Funktion `Y2` Folgendes ein:

[MATH] [9:fnInt(] [VARS] [▶] [ENTER] [ENTER] [,] [X,T,θ,n] [,] [1] [,] [X,T,θ,n] [)] [ENTER]

Bei dem Befehl `fnInt` gibt man der Reihe nach, jeweils durch ein Komma getrennt, ein:

- den Funktionsterm;
- die Variable;
- die untere Grenze;
- die obere Grenze, also wieder die Variable.

Deaktiviere die Funktion `Y1`. Gib `Xmin` = 0 und (beispielsweise) `Xmax` = 10 ein und zeichne das Schaubild mit `ZoomFit`. Gib mit [2nd] `[TBLSet]` den Startwert 1 für eine Wertetabelle ein und erstelle mit [2nd] `[TABLE]` eine Wertetabelle.

Bemerkung: Das Zeichnen einer Integralfunktion dauert lange. Es geht schneller, wenn man im `WINDOW`-Editor den Wert von `Xres` (von *res*olution, also Auflösung) von dem voreingestellten kleinstmöglichen Wert 1 auf den größtmöglichen Wert 8 ändert. Das bedeutet, dass der GTR nur jedes achte gezeichnete Pixel berechnet. Teste dies. Allerdings werden jetzt Schaubilder ungenau gezeichnet: Teste dies mit der Sinusfunktion. Deshalb sollte `Xres` wieder den Wert 1 erhalten.

<u>Standardaufgabe:</u> Gegeben sind eine Funktion *f*, eine Zahl *a* und eine Zahl *w*. Bestimme die Stelle *x*, an der das Integral $\int_a^x f(x)\,dx$ bzw. die Integralfunktion I_a: $I_a(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ den Wert *w* hat, d. h. löse die Gleichung $\int_a^x f(x)\,dx = w$.

<u>Bemerkung:</u> Diese Standardaufgabe ist das „Gegenstück“ zu der Standardaufgabe auf dem Blatt „Ableitungen mit dem GTR“.

<u>Lösung:</u>
Erste Möglichkeit (teilweise mit GTR):

1. Bestimme ohne GTR die Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^x$.
2. Gib die Integralfunktion I_a als Funktion `Y1` ein.
3. Gib als Funktion `Y2` die konstante Funktion *w* ein.
4. Bestimme mit dem Befehl `intersect` die Lösung der Gleichung `Y1 = Y2`.

Zweite Möglichkeit (vollständig mit GTR):

1. Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` ein.
2. Gib als Funktion `Y2` die Integralfunktion $\int_a^x f(x)\,dx$ ein, also $\mathtt{Y2} = \mathtt{fnInt}(\mathtt{Y1}, \mathtt{X}, a, \mathtt{X})$.
3. Gib als Funktion `Y3` die konstante Funktion *w* ein.
4. Deaktiviere die Funktion `Y1`.
5. Bestimme mit dem Befehl `intersect` die Lösung der Gleichung `Y2 = Y3`.

<u>Musteraufschrieb:</u>

GTR: $\mathtt{Y1} = f(x)$

$\mathtt{Y2} = \mathtt{fnInt}(\mathtt{Y1}, \mathtt{X}, a, \mathtt{X})$

$\mathtt{Y3} = w$

$\mathtt{Y2} = \mathtt{Y3}:\ x \approx \ldots$

Dritte Möglichkeit (vollständig mit GTR):

1. Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` ein.
2. Gib als Funktion `Y2` die Integralfunktion $\int_a^x f(x)\,dx$ ein, also $\mathtt{Y2} = \mathtt{fnInt}(\mathtt{Y1}, \mathtt{X}, a, \mathtt{X})$.
3. Bestimme durch Blättern in der Wertetabelle von `Y2` den nächstkleineren Wert x_1 und den nächstgrößeren Wert x_2, für die gilt:
$$\mathtt{Y2}(x_1) < w < \mathtt{Y2}(x_2).$$

<u>Musteraufschrieb:</u>

GTR: $\mathtt{Y1} = f(x)$

$\mathtt{Y2} = \mathtt{fnInt}(\mathtt{Y1}, \mathtt{X}, a, \mathtt{X})$

$\texttt{Y2}(x_1) \approx \ldots$
$\texttt{Y2}(x_2) \approx \ldots$
$x \approx \ldots$

Flächenberechnungen

Standardaufgabe: Gegeben ist eine Funktion *f* und ein Intervall $[a; b]$. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von *f*, der *x*-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

Lösung: Es ist $A = \int_a^b |f(x)|\, dx$. Der Betrag ist der Befehl `abs` im `MATH`-`NUM`-Menü.

1. Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` ein.
2. Gib als Funktion `Y2` den Betrag der Funktion `Y1` ein, also
   [MATH] [▶] [ENTER] [VARS] [▶] [ENTER] [ENTER] [)]
3. Deaktiviere die Funktion `Y1`.
4. Wähle `Xmin` etwas kleiner als *a* und `Xmax` etwas größer als *b* und zeichne die Funktion `Y2` mit `ZoomFit`.
5. Berechne das Integral $\int_a^b Y2\, dx$.

Musteraufschrieb: GTR: $A = \int_a^b |f(x)|\, dx \approx \ldots$

Abwandlung: Gegeben ist eine Funktion *f*. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von *f* und der *x*-Achse begrenzt wird.

Lösung: Bestimme die kleinste Nullstelle *a* und die größte Nullstelle *b* von *f*; dann ist
$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$.

Musteraufschrieb:
$f(x) = 0$
GTR: Falls es zwei Lösungen gibt: $x_1 \approx \ldots$; $x_2 \approx \ldots$;
falls es mehr als zwei Lösungen gibt: kleinste Lösung: $a \approx \ldots$; größte Lösung: $b \approx \ldots$.
$A = \int_{\ldots}^{\ldots} |f(x)|\, dx \approx \ldots$

Für Experten: Man kann die kleinste Nullstelle auch speichern: Wechsle ins Hauptmenü und speichere sie mit [ALPHA] `[X]` [STO→] [ALPHA] `[A]` als *a*. Speichere entsprechend die größte Nullstelle als *b*. Dann kann man als untere Integralgrenze [ALPHA] `[A]` und als obere Integralgrenze [ALPHA] `[B]` eingeben.

Standardaufgabe: Gegeben sind zwei Funktionen *f* und *g* und ein Intervall $[a; b]$. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Schaubildern von *f* und *g* und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

Lösung: Es ist $A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$.

1. Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` und die Funktion *g* als Funktion `Y2` ein.
2. Gib als Funktion `Y3` den Betrag der Differenz der Funktionen `Y1` und `Y2` ein, also
   [MATH] [▶] [ENTER] [VARS] [▶] [ENTER] [ENTER] [–] [VARS] [▶] [ENTER] [▼] [ENTER] [)]
3. Deaktiviere `Y1` und `Y2`, zeichne `Y3` und berechne $\int_a^b Y3\, dx$.

Musteraufschrieb: GTR: $A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx \approx \ldots$

Abwandlung: Gegeben sind zwei Funktionen *f* und *g*. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Schaubildern von *f* und *g* begrenzt wird.

Lösung: Bestimme die kleinste Schnittstelle *a* und die größte Schnittstelle *b* von *f* und *g*; dann ist
$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$.

Musteraufschrieb:
$f(x) = g(x)$
GTR: Falls es zwei Lösungen gibt: $x_1 \approx \ldots$; $x_2 \approx \ldots$;
falls es mehr als zwei Lösungen gibt: kleinste Lösung: $a \approx \ldots$; größte Lösung: $b \approx \ldots$.
$$A = \int_{\ldots}^{\ldots} \left| f(x) - g(x) \right| dx \approx \ldots$$

Volumen von Rotationskörpern

Standardaufgabe: Gegeben ist eine Funktion *f* und ein Intervall $[a; b]$. Die Fläche, die vom Schaubild von *f*, der *x*-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, rotiert um die *x*-Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

Lösung: Es ist $V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx$.

1. Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` ein.
2. Gib als Funktion `Y2` das Quadrat der Funktion `Y1` ein, also
   [VARS] [▶] [ENTER] [ENTER] [x^2]
3. Deaktiviere die Funktion `Y1`.
4. Berechne das Integral $\int_a^b Y2\, dx$.
5. Multipliziere das Ergebnis mit π.
   Bemerkung: Man kann mit dem Wert eines Integrals direkt weiterrechnen, d. h. in unserem Fall nach der Berechnung des Integrals einfach die Mal-Taste und [2nd] `[π]` drücken. Dann erscheint im Hauptbildschirm `Ans * π` und das π-fache des Integrals.

Musteraufschrieb: GTR: $V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx \approx \ldots$